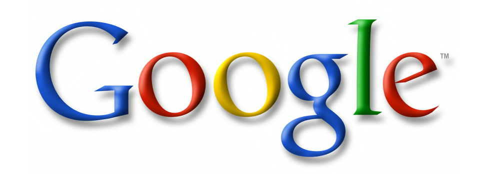





HARVARD
UNIVERSITY
LIBRARY


CHRISTO ET ECCLESIAE
VE RI TAS



Übersicht über die Entwickelung der Theorie der geodätischen Linien seit Gauss.

Inaugural - Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät der Landes-Universität Rostock

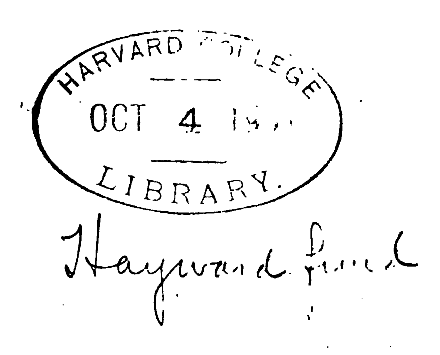
vorgelegt

von

Paul Sager

aus Berlin.

Rostock
Carl Hinstorff's Buchdruckerei
1903.



Referent: Herr Prof. Dr. Staude.

In der vorliegenden Abhandlung soll versucht werden, eine Übersicht über die Entwickelung der Theorie der geodätischen Linien seit Gauss zu geben. Damit die Abhandlung in engen Grenzen blieb, konnten natürlich nur die bedeutenderen Arbeiten auf diesem Gebiete berücksichtigt werden, und auch von diesen ist ein Teil aus verschiedenen Gründen nicht behandelt worden. So habe ich z. B. die Theorie der homogenen Integrale höheren Grades ausgelassen, denn einerseits ist dieselbe in dem III. Band der Leçons sur la théorie générale des surfaces von Darboux (1894) so behandelt, dass man bei den vielen Formeln, die dabei hauptsächlich in Betracht kommen, wohl kaum eine kürzere Darstellung geben kann, anderseits sind auch nach 1894 auf diesem Gebiete keine neuen Resultate zu verzeichnen gewesen. Ferner habe ich z. B. die Ergebnisse, die v. Braunmühl, Staude und Weierstrass über geodätische Linien auf Flächen zweiten Grades mit Hülfe der Theorie der hyperelliptischen Funktionen gefunden haben, nicht weiter ausgeführt, da dieselben, wie ich glaube, mehr in die Anwendungen der hyperelliptischen Funktionen hineingehören. Weiter habe ich von vornherein die speziell geodätischen Abhandlungen, die in geodätischen Zeitschriften veröffentlicht sind, ausgeschlossen. Die übrigen,

die rein mathematischen, habe ich, soweit sie mir zugänglich waren, am Schlusse meiner Arbeit zusammengestellt. In der Arbeit selbst habe ich daher die betreffenden Abhandlungen nicht mit dem vollen Titel zitiert, sondern nur den Namen des Verfassers und das Jahr angegeben, wodurch wohl in allen Fällen eine eindeutige Bezeichnung erreicht worden ist.

Was die Einteilung betrifft, so sollen in dem ersten Abschnitte die grundlegenden Tatsachen, die besonders von Gauss und Jacobi herrühren, gegeben werden, im zweiten Abschnitte soll über die geodätischen Linien auf speziellen Flächen und im dritten über allgemeine Ergebnisse der Theorie der geodätischen Linien berichtet werden, wobei ich das Wort „allgemein" so verstehe, dass man bei den in Frage kommenden Ergebnissen nicht von speziellen Flächen, sondern von einem beliebigen Problem ausgegangen ist, als dessen Lösung sich dann allerdings spezielle Flächen ergeben haben.

Unter einer geodätischen Linie einer krummen Fläche versteht man eine solche Kurve, deren Hauptnormale in jedem Punkte mit der Flächennormale zusammenfällt. Man kann zeigen, dass diese Linien auch die Eigenschaft haben, innerhalb gewisser Grenzen die kürzeste Verbindungslinie von zwei gegegebenen Punkten der Fläche darzustellen. Durch diese Eigenschaft sind auch die geodätischen Linien zuerst in die Literatur eingeführt worden.

Im Jahre 1697 legte nämlich Joh. Bernoulli[1] den damaligen Geometern die Aufgabe vor, die den Beginn der Geschichte der geodätischen Linien bildet: Es sollen zwei gegebene Punkte einer krummen Fläche durch die kürzeste Linie verbunden werden. Bernoulli selbst fand die obige Fundamentaleigenschaft dieser kürzesten Linien, dass nämlich in jedem Punkte derselben die Hauptnormale mit der Flächennormale zusammenfällt. Im folgenden Jahrhundert beschäftigten sich mit der Theorie der kürzesten Linien besonders Euler, der zuerst die Differentialgleichung der kürzesten Linien aufstellte, und Lagrange, der nachwies, dass die Bedingung der Orthogonalität der Tangentialebene der Fläche und der Schmiegungsebene der kürzesten

---

1) Siehe Stäckel (1893) pg. 445.

Linien vermöge der Differentialgleichung der kürzesten Linien identisch erfüllt wird. „Eine neue Periode für die Theorie der geodätischen Linien beginnt 1827 mit den klassischen Disquisitiones generales circa superficies curvas von Gauss, von denen fast die Hälfte den geodätischen Linien gewidmet ist.“[1] In dieser Abhandlung scheidet Gauss „diejenigen Eigenschaften, welche durch die Gleichung einer speziellen Fläche gegeben werden, von denjenigen, die nur die Kenntnis der Koeffizienten des Linienelementes der zugehörigen Flächenklasse erfordern. Die Theorie der geodätischen Linien behandelt nur Eigenschaften zweiter Art.“[2]

Gauss führt ebenso wie seine Vorgänger noch nicht die Unterscheidung zwischen geodätischen und kürzesten Linien auf der Fläche ein; dass dies aber nötig, ist zuerst von Jacobi (1837) bemerkt worden. Innerhalb welcher Grenzen die geodätischen Linien kürzeste Linien sind, soll später noch näher ausgeführt werden. Den Namen „geodätische Linien“ für die Kurven, die der Differentialgleichung der kürzesten Linien genügen, hat zuerst Liouville allgemein gebraucht und dieselben wie oben definiert.

I. Grundlegende Tatsachen der Theorie der geodätischen Linien.

Sind die kartesischen Koordinaten x, y, z einer Fläche als Funktionen zweier Parameter u, v gegeben, ist also

1) Stäckel (1893) pg. 451.
2) Weingarten (1869) pg. 75.

$$x = f(u,v)\ ,\ y = g(u,v)\ ,\ z = h(u,v),$$

eine Darstellung der Fläche, die von Gauss herrührt, so ist der Ausdruck des Quadrates der Länge des Linienelementes der Fläche:

$$(1)\qquad ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \qquad \text{wobei}$$

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{dz}{du}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \qquad \text{ist.}$$

Denken wir uns für eine bestimmte Kurve der Fläche u und v als Funktionen eines Parameters t, so muss, wenn die Kurve die kürzeste Verbindungslinie zweier gegebenen Punkte, die den Werten t_0 und t_1 des Parameters t entsprechen, darstellen soll, das Integral:

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\,\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt$$

ein Minimum sein, d. h. es muss die erste Variation dieses Integrals $\delta s = 0$ sein. Mit Hülfe dieser Bedingung zeigt Gauss sofort die Fundamentaleigenschaft der geodätischen Linien, dass die Hauptnormale der Kurve mit der Flächennormale zusammenfällt. Ferner ergibt sich folgende Differentialgleichung für die geodätischen Linien:

$$(E\,du + F\,dv)\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}\right)du^2 + \frac{\partial G}{\partial u}du\,dv + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}dv^2\right\}$$

$$(2)\qquad -(F\,du + G\,dv)\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}du^2 + \frac{\partial E}{\partial v}du\,dv + \left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}\right)du^2\right\} + (EG - F^2)(du\,d^2v - dv\,d^2u) = 0.$$

Betrachtet man u als unabhängige Variable, so kann man mit Darboux die Gleichung auch schreiben:

$$\left\{2\,d\,(Gv'+F) - du\left(\frac{\partial E}{\partial v} + 2\frac{\partial F}{\partial v}v' + \frac{\partial G}{\partial v}v'^2\right)\right\}(F+2Fv'+Gv'^2) - (Gv'+F)d(E+2Fv'+Gv'^2) = 0.$$

„Man erkennt so unmittelbar, dass die Linien von der Länge O der Fläche, die durch die Gleichung:

$$E + 2\,Fv' + Gv'^2 = 0$$

definiert sind, der Differentialgleichung der geodätischen Linien genügen."

Mit Hülfe der Fundamentaleigenschaft der geodätischen Linien leitet nun Gauss die beiden wichtigen Sätze ab:

„Werden auf einer krummen Fläche von demselben Anfangspunkt aus kürzeste Linien von gleicher Länge gezogen, so steht die ihre Endpunkte verbindende Linie auf ihnen allen senkrecht."

„Wenn man auf einer krummen Fläche eine beliebige Linie gezogen denkt, von deren einzelnen Punkten unter rechten Winkeln und nach derselben Seite hin unzählige kürzeste Linien von gleicher Länge ausgehen, so schneidet die Kurve, welche die andern Endpunkte derselben verbindet, jene unter rechten Winkeln."

Diese beiden Sätze bilden die Grundlage für die Einführung zweier neuen Koordinatensysteme: des geodätischen Polarkoordinaten- und des geodätischen Parallelkoordinatensystems. Bei dem ersten nimmt man die von einem Punkte der Fläche ausgehenden

geodätischen Linien und die sie orthogonal durchschneidenden sogenannten geodätischen Kreise als Koordinatenlinien an und bei dem zweiten die geodätischen Linien, die zu einer gegebenen Kurve orthogonal sind, und ihre orthogonalen Trajektorien, die sogenannten geodätischen Parallelen der gegebenen Kurve, als Koordinatenlinien an. Bei der Annahme dieser speziellen Koordinatensysteme kann das Linienelement der Fläche auf die einfache Form:

$$ds^2 = du^2 + m^2 dv^2$$

gebracht werden; die Krümmung der Fläche wird dann:

$$K = -\frac{1}{m}\frac{\partial^2 m}{\partial u^2}.$$

Für den Fall geodätischer Polarkoordinaten, ist m den Bedingungen unterworfen, dass für $u = o$: $m = o$ und $\frac{\partial m}{\partial u} = 1$ wird.

G a u s s hat ferner durch die Einführung des Winkels ϑ, den die geodätische Linie mit einer Kurve $v =$ const bildet (dieser Winkel wird besonders in den geodätischen Anwendungen als das Azimut der betreffenden geodätischen Linie bezeichnet) die Differentialgleichung (2) auf die bemerkenswerte Form gebracht:

$$\sqrt{EG - F^2}\, d\vartheta = \tfrac{1}{2}\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial u} du + \tfrac{1}{2}\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial v} dv + \tfrac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} du - \frac{\partial F}{\partial u} du - \tfrac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} dv.$$

Für orthogonal geodätische Koordinaten wird diese Gleichung:

$$d\vartheta = -\frac{\partial m}{\partial u}\, dv.$$

Bezeichnen wir bei einem geodätischen Polarkoordinatensystem mit φ = const die geodätischen Linien und mit r = const die geodätischen Kreise, so kann das Linienelement (1) auf die Form:

$$ds^2 = dr^2 + m^2\, d\varphi^2$$

gebracht werden. Die Formeln für die Transformation einer binären quadratischen Differentialform geben dann für r und φ die partiellen Differentialgleichungen:

$$\frac{1}{EG-F^2}\left\{E\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial r}{\partial v} + G\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2\right\} = 1,$$

$$\left(E\frac{\partial r}{\partial v} - F\frac{\partial r}{\partial u}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \left(F\frac{\partial r}{\partial v} - G\frac{\partial r}{\partial u}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0,$$

oder, wenn man nach Beltrami die rechte Seite der ersten Gleichung mit Δ (r), die rechte Seite der zweiten Gleichung mit Δ (r, φ) bezeichnet, so kann man die Gleichungen auch schreiben:

(3) $\Delta(r) = 1,$ (4) $\Delta(r, \varphi) = 0.$

Es ist also nach Gauss zur Bestimmung der geodätischen Linien einer Fläche zunächst r aus (3) zu bestimmen und dann φ aus (4).

Bei Jacobi ergibt sich das Problem der geodätischen Linien als spezieller Fall des allgemeinen, die Bewegung eines Systems materieller Punkte, die gewissen Bedingungen unterworfen sind, zu bestimmen.

Bewegt sich nämlich ein Punkt auf einer Fläche ohne Einwirkung äusserer Kräfte, so beschreibt er eine geodätische Linie. Man kann also das Problem der geodätischen Linien als ein mechanisches Problem auffassen und mit den Hülfsmitteln der analytischen Mechanik behandeln. Jacobi geht in seinen Vorlesungen über Dynamik (1842/43) von den Bewegungsgleichungen in der Hamiltonschen oder kanonischen Form aus, und durch die betreffenden Spezialisierungen für die geodätischen Linien gelangt er zu einer Gleichung, von der Weingarten (1862) zuerst bemerkt hat, dass sie mit der Gauss'schen Gleichung (3) übereinstimmt. Aus der Jacobi'schen Theorie ergibt sich nun, dass zur Bestimmung der geodätischen Linien nicht nötig ist, die Gleichung (4) zu integrieren, sondern, wenn man von der Gleichung $\Delta(r) = 1$ eine Lösung r kennt, die eine wesentliche, d. h. in r nicht additiv auftretende willkürliche Constante a enthält, so hat man, um ein Integral der zweiten Gleichung zu erhalten, r nur nach dieser Konstanten zu differentiieren, und es ist dann $\frac{\partial r}{\partial a} = \text{const}$ die Gleichung der geodätischen Linien. Man kann also einfach:

$$\varphi = \frac{\partial r}{\partial a} \qquad \text{setzen.}$$

Ferner folgt aus dem Jacobi'schen Prinzip des letzten Multiplikators, das lautet: „Nimmt man an, dass man ein Problem der Mechanik bis auf eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln zurückgeführt habe, so kann man den

Multiplikator dieser Differentialgleichung allgemein angeben;“ der Satz: Kennt man von der Differentialgleichung zweiter Ordnung der geodätischen Linien nur eine intermediäre Integralgleichung erster Ordnung mit einer willkürlichen Konstanten, so ergibt sich die Gleichung dieser Linien mittels Quadraturen in endlicher Gestalt.

Liouville hat die Bewegung eines Punktes auf einer Fläche mit der Bewegung eines Punktes in einer Ebene in Verbindung gesetzt. Ist nämlich:

$$ds^2 = \lambda(\alpha, \beta)\,(d\alpha^2 + d\beta^2)$$

das Linienelement einer Fläche auf isometrische Koordinaten bezogen, so kann man die Gleichung der geodätischen Linien immer dann integrieren, wenn man α und β als rechtwinklige ebene Koordinaten genommen, die Bewegung eines Punktes in einer Ebene bestimmen kann, der einer solchen Kraft unterworfen ist, dass λ die Kräftefunktion und $2\,\lambda$ die lebendige Kraft ist. Denn für die freie Bewegung auf der Fläche sind, wenn man das Prinzip der lebendigen Kraft:

$$\lambda\left\{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2\right\} = C$$

beachtet, die Differentialgleichungen der Bewegung in der zweiten Lagrange'schen Form:

$$\frac{d\left(\lambda\frac{d\alpha}{dt}\right)}{dt} = \frac{C}{2\lambda}\,\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}\,,\quad \frac{d\left(\lambda\frac{d\beta}{dt}\right)}{dt} = \frac{C}{2\lambda}\,\frac{\partial\lambda}{\partial\beta}\,.$$

Setzt man nun: $\sqrt{\frac{C}{2}}\,\frac{dt}{\lambda} = d\tau\,,$

so ergeben sich die beiden Gleichungen:

$$\frac{d^2\alpha}{d\tau^2} = \frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}, \quad \frac{d^2\beta}{d\tau^2} = \frac{\partial\lambda}{\partial\beta},$$

und es wird die lebendige Kraft:

$$\left(\frac{d\alpha}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{d\tau}\right)^2 = 2\lambda,$$

woraus das Gesagte unmittelbar folgt.

II. Die geodätischen Linien auf speziellen Flächen.

1. Die geodätischen Linien auf den Flächen zweiten Grades.

Die geodätischen Linien auf dem Ellipsoid hat zuerst Jacobi (1839) bestimmt, und zwar hat er dies durch die Einführung der sogenannten elliptischen Koordinaten erreicht. Dieselbe besteht darin, die Punkte des Ellipsoides als Intersektion der beiden Krümmungslinien zu bestimmen, auf denen er liegt, oder nach dem Dupinschen Satze ihn als Intersektion des Ellipsoides mit den beiden durch ihn gehenden konfokalen Hyperboloiden zu betrachten. Es kann dann die der partiellen Differentialgleichung (3) analoge in der Jacobi'schen Theorie in zwei gewöhnliche zerlegt werden, die durch Quadraturen gelöst werden können. Das Integral enthält eine willkürliche Konstante. Differentiiert man dasselbe nach der willkürlichen Konstanten, so ergibt sich die Gleichung

der geodätischen Linien als Differenz zweier Abelschen Integrale gleich einer Konstanten.

Sind $a_1 + \lambda_1$, $a_2 + \lambda_1$, $a_3 + \lambda_1$ die Quadrate der halben Achsen des Ellipsoides, so lautet die Gleichung der geodätischen Linien, wie sie sich in den Vorlesungen Jacobis über Dynamik befindet:

$$\text{Const} = \int d\lambda_2 \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{(a_1 + \lambda_2)(a_2 + \lambda_2)(a_3 + \lambda_2)(\beta + \lambda_2)}} + \int d\lambda_3 \sqrt{\frac{\lambda_3 - \lambda_1}{(a_1 + \lambda_3)(a_2 + \lambda_3)(a_3 + \lambda_3)(\beta + \lambda_3)}}\,.$$

In seiner ersten Note (1839) über diesen Gegenstand ist Jacobi von folgenden Gleichungen des Ellipsoides ausgegangen:

$$x = \sqrt{\frac{a}{c-a}} \sin\varphi \sqrt{b\cos^2\psi + c\sin^2\psi - a}\,,$$

$$y = \sqrt{b}\cos\varphi \sin\psi,$$

$$z = \sqrt{\frac{c}{c-a}} \cos\psi \sqrt{c - a\cos^2\varphi - b\sin^2\varphi}$$

Die Gleichung der geodätischen Linien wird dann:

$$\alpha = \int \frac{\sqrt{a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi}\,.\,d\varphi}{\sqrt{[c - a\cos^2\varphi - b\sin^2\varphi][(b-a)\cos^2\varphi - \beta]}} - \int \frac{\sqrt{b\cos^2\psi + c\sin^2\psi}\,.\,d\psi}{\sqrt{[b\cos^2\psi + c\sin^2\psi - a][(c-b)\sin^2\psi + \beta]}}\,,$$

eine Gleichung, die sich übrigens durch eine einfache Transformation in die obige überführen lässt.

Mit der Zurückführung dieser Integrale auf hyperelliptische Funktionen hat sich dann später Weierstrass (1861) und v. Braunmühl (1882) beschäftigt.

Die Jacobi'sche Entdeckung hat eine Fülle von Arbeiten anderer Mathematiker über die geodätischen Linien sowohl speziell auf dem Ellipsoid als auch auf den Flächen zweiten Grades überhaupt hervorgerufen. So integrierte Joachimsthal (1843) auf einem anderen Wege die Differentialgleichung der geodätischen Linien für sämtliche Flächen zweiter Ordnung, indem er nicht von der Darstellung der Fläche durch zwei Parameter, sondern von der Darstellung $F(x, y, z) = o$ ausging. Er gelangte dabei zu einer interessanten Deutung des ersten Integrals:

„Legt man durch einen Punkt des Ellipsoides eine geodätische Linie und konstruiert die Tangentialebene der Fläche in diesem Punkte und die Tangente an die geodätische Linie, so ist der Abstand der Tangentialebene vom Mittelpunkt multipliziert mit der Länge des der Tangente parallelen Halbmesser längs der ganzen geodätischen Linie konstant."

In den folgenden Jahren beschäftigten sich besonders J. Liouville, M. Roberts und Chasles mit diesem Gegenstande und leiteten eine Reihe interessanter Sätze ab. Liouville (1844) geht von den Differentialgleichungen der Mechanik und zwar von den Bewegungsgleichungen in der zweiten Lagrange'schen Form aus und findet als Deutung des ersten Integrals den Satz: „Sind $u = \text{const}$ und $v = \text{const}$ die beiden Scharen von Krümmungslinien und ist i der Winkel, den die geodätische Linie mit den Kurven $u = \text{const}$ bildet, so ist der Ausdruck: $u^2 \cos^2 i + v^2 \sin^2 i$ längs der ganzen geodätischen Linie konstant."

Diesen Satz hat C h e l i n i (1845) zuerst durch eine Rechnung auf den J o a c h i m s t h a l 'schen Satz zurückgeführt.

Aus diesem Satze L i o u v i l l e s folgen zum grössten Teile die Resultate, welche die drei oben genannten Mathematiker erhalten haben. Es ergibt sich dabei eine Analogie der Krümmungslinien dieser Flächen mit den konfokalen Ellipsen und Hyperbeln in der Ebene, wenn man für die Geraden in der Ebene die geodätischen Linien auf der Fläche nimmt. So findet R o b e r t s (1845), dass für die Punkte einer Krümmungslinie des Ellipsoides die Summe oder Differenz der Abstände von den Nabelpunkten konstant ist. Da nun ein auf einer Fläche ausgespannter Faden die Lage einer geodätischen Linie annimmt, so ergibt sich hieraus eine ähnliche mechanische Konstruktion der Krümmungskurven der Flächen zweiten Grades wie der Ellipsen in der Ebene.

Ferner rühren von L i o u v i l l e (1856) die Sätze her:

„Unter allen geodätischen Polygonen von einer gegebenen Anzahl von Seiten, die man einer gegebenen Krümmungslinie auf einem Ellipsoid umschreiben kann, hat dasjenige, welches den kleinsten Umfang hat, seine sämtlichen Spitzen auf einer und derselben bestimmten Krümmungslinie. Die erste Spitze kann beliebig in irgend einem Punkte der letzteren Linie angenommen werden. Ebenso sind die Seiten des Polygons vom grössten Umfang, das einer ge-

gebenen Krümmungslinie eingeschrieben ist, alle Tangenten an eine zweite Krümmungslinie.

Von den Ergebnissen Chasles' (1846) seien erwähnt:

„Die Schmiegungsebenen in den verschiedenen Punkten einer geodätischen Linie auf einer Fläche zweiten Grades berühren alle eine andere Fläche zweiten Grades, die der ersten homofokal ist." „Alle Tangenten einer geodätischen Linie einer Fläche zweiten Grades berühren eine zweite Fläche, die der ersten homofokal ist."

Mit Hülfe der hyperelliptischen Funktionen hat besonders Staude (1882) weitere interessante Eigenschaften der geodätischen Linien auf den Flächen zweiten Grades erhalten.

Was den Verlauf der geodätischen Linien auf dem Ellipsoid betrifft, so hat M. Roberts (1846) gezeigt, dass jede geodätische Linie, die durch einen Nabelpunkt geht, auch durch den entgegengesetzten Nabelpunkt geht. Vorher hat Joachimsthal (1842) aus dem Satze, dass jede geodätische Linie auf dem Ellipsoid eine Krümmungskurve berührt, gefolgert, dass die geodätischen Linien die beiden Ovale, die zusammen eine Krümmungskurve bilden, abwechselnd berühren und so zwischen diesen beiden Kurven im allgemeinen unendlich oft hin- und herlaufen.

2. Die geodätischen Linien auf den Liouville'schen Flächen im allgemeinen.

Die Flächen zweiten Grades gehören zu einer Klasse von Flächen, die zuerst von Liouville (1846)

aufgestellt worden ist und für die er zuerst die Differentialgleichung der geodätischen Linien integriert hat. Dieselben sind dadurch definiert, dass man das Linienelement der Fläche bei Einführung isometrischer Koordinaten auf die Form:

$$ds^2 = (f(\alpha) - F(\beta))(d\alpha^2 + d\beta^2) \tag{5}$$

oder auf die Form:

$$ds^2 = (f(x+y) - g(x-y))\,dx\,dy \tag{6}$$

bringen kann; die letzte ist jedoch erst später in der Literatur aufgetreten und ergibt sich aus der vorhergehenden dadurch, dass man $x = \alpha + i\beta$ und $y = \alpha - i\beta$ setzt. Es ist zwar immer möglich, das Linienelement einer Fläche auf die Form:

$$ds^2 = G(\alpha, \beta)(d\alpha^2 + d\beta^2) \qquad \text{oder:}$$

$$ds^2 = \lambda(x, y)\,dx\,dy$$

zu bringen, aber wann es auch die Form (5) bezw. (6) annehmen kann, ist noch nicht allgemein entschieden. Diese Frage ist identisch mit der aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen: wann man eine gegebene Moutard'sche Gleichung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \lambda(x, y) \cdot z$$

auf die harmonische Form:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = (f(x+y) - g(x-y)) \cdot z$$

bringen kann. Darboux hat die Gleichung, von der die Lösung des Problems abhängt, auf die Form gebracht:

$$2X\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2} + 3X'\frac{\partial\lambda}{\partial x} + X''\lambda = 2Y\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2} + 3Y'\frac{\partial\lambda}{\partial y} + Y''\lambda,$$

wobei X und Y nur von x bezw. y abhängige Funktionen sind. Aus dieser Gleichung sind X und Y zu bestimmen, und man erhält dann durch die Substitution:

$$x' = \int \frac{dx}{\sqrt{X}}, \quad y' = \int \frac{dy}{\sqrt{Y}}$$

die Liouville'sche Form. Daraus, dass die Darboux'sche Gleichung homogen und linear in bezug auf X, Y und die Ableitungen ist, folgt, dass, wenn man zwei Paare von Funktionen X_1 Y_1 und X_2 Y_2 kennt, welche die Gleichung befriedigen, auch $aX_1 + bX_2$, $aY_1 + bY_2$ der Gleichung Genüge leisten für a und b als Konstanten. Mithin: „Wenn man weiss, dass ein Linienelement sich auf zwei verschiedene Weisen in die Liouville'sche Form setzen lässt, so muss eine solche Transformation auf unendlich viele Weisen möglich sein". Bei den Flächen zweiten Grades kann man das Linienelement immer auf die Liouville'sche Form bringen.

Liouville geht nun von der Gleichung (5) aus, und mit Anwendung der oben pg. 12, 13 entwickelten Methode folgt, da hier:

$$\lambda = f(\alpha) - F(\beta) \qquad \text{ist.}$$

$$\frac{d^2\alpha}{d\tau^2} = f'(\alpha), \quad \frac{d^2\beta}{d\tau^2} = F'(\beta)$$

Es wird daher das erste Integral der geodätischen Linien:

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{f(\alpha) - a}} = \frac{d\beta}{\sqrt{a - F(\beta)}},$$

das man unter Einführung des Winkels i, unter dem die geodätische Linie die Linien $\alpha = \text{const}$ schneidet, auf die Form:

$$f(\alpha)\cos^2 i + F(\beta)\sin^2 i = a$$

bringen kann. Die Gleichung der geodätischen Linien wird:

$$\int \frac{d\alpha}{\sqrt{f(\alpha) - a}} + \int \frac{d\beta}{\sqrt{a - F(\beta)}} = C.$$

3. Die geodätischen Linien auf den Rotationsflächen.

Zu den L i o u v i l l e 'schen Flächen gehören auch die Rotationsflächen und die Flächen konstanten Krümmungsmasses. Bei den Rotationsflächen ist es immer möglich, das Linienelement auf die L i o u v i l l e-sche Form zu bringen. Die Ermittelung der geodätischen Linien für die Rotationsflächen ist aber schon bedeutend früher 1698 von J a c o b B e r n o u l l i auf Quadraturen zurückgeführt worden. Nach J a c o b B e r n o u l l i, hat sich C l a i r a u t (1733) mit den geodätischen Linien der Rotationsflächen beschäftigt und das wichtige Theorem bewiesen, dass für jede solche Linie das Produkt aus dem Radius des Parallelkreises r und dem Sinus des Winkels ω, den ihre Tangente mit dem Meridian bildet, einen konstanten Wert hat:

$$r \, . \sin \omega = a.$$

Es ist im allgemeinen:

$$ds^2 = du^2 + r^2 dv^2$$

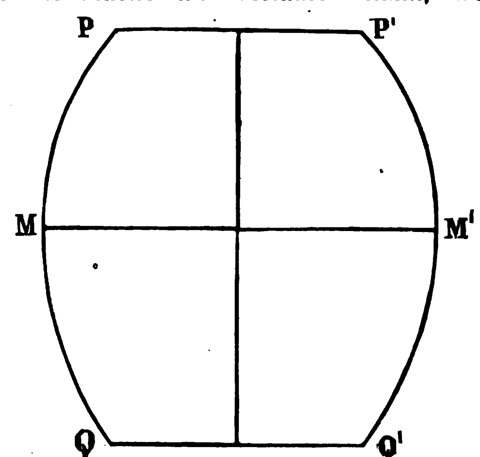
das Linienelement einer Rotationsfläche, wo r eine Funktion von u allein ist, u den Bogen des Meridians von einem bestimmten Punkte an gerechnet und r den Radius des Parallelkreises, der durch den Punkt u, v

geht, bezeichnet. Die Gleichung der geodätischen Linien wird dann:

$$v = a\int\frac{du}{r\sqrt{r^2 - a^2}} + a',$$

wo a und a′ beliebige Konstanten sind.

In neuester Zeit sind nun besonders die Rotationsflächen, auf denen wie auf der Kugel sämtliche geodätische Linien geschlossen sind, in den Vordergrund gerückt worden. Darboux hat zuerst eine Methode zur Bestimmung solcher Flächen angegeben. Aus dem Clairaut'schen Satze folgt unmittelbar, dass, wenn man für eine bestimmte geodätische Linie a einen bestimmten Wert erteilt, die geodätische Linie den Parallelkreis, dessen Radius $r = a$ ist, berührt; denn für $r = a$ ist $\omega = \frac{\pi}{2}$. Ferner ergibt sich daraus, dass die betreffende geodätische Linie nur nach der Seite der Fläche hin verlaufen kann, wo $r > a$



werden kann. Besitzt die Fläche einen Maximalparallelkreis MM′ und sind PP′ und QQ′ zwei Parallelkreise, die dem Werte $r = a$ entsprechen, so muss die geodätische

Linie in der Zone, die durch die beiden Parallelkreise PP′ und QQ′ begrenzt wird, verlaufen, indem sie die beiden Parallelkreise abwechselnd berührt. Geht nun die geodätische Linie von einem bestimmten Punkte $v = v_0$ auf PP′ aus und gelangt zu einem Punkte $v = v_1$ auf QQ′, so wird, wenn in der Zone PP′ MM′:

$$du = \varphi(r)\,dr$$

und in der Zone MM′ QQ′:

$$du = -\psi(r)\,dr$$

ist,

$$v_1 - v_0 = \int_a^R \frac{a(\varphi(r) + \psi(r))\,dr}{r\sqrt{r^2 - a^2}} = \Omega,$$

und es ist Ω der Winkel, um den sich die Meridianebene gedreht hat. Lässt man die geodätische Linie wieder bis zum Parallelkreis PP′ gehen, so dreht sich die Meridianebene wieder um den Winkel Ω u. s. w. Soll sich die geodätische Linie schliessen, so muss Ω in einem rationalen Verhältnis zu π stehen. Dies Verhältnis muss, wenn alle geodätischen Linien, die auf keinen Rand stossen, geschlossen sein sollen, von a unabhängig sein, also:

$$\int_a^R \frac{a(\varphi(r) + \psi(r))\,dr}{r\sqrt{r^2 - a^2}} = m\pi.$$

Hieraus ist $\varphi(r)$ und $\psi(r)$ zu bestimmen. Darboux macht deshalb die Substitution:

$$\frac{1}{r^2} = z + \frac{1}{R^2}, \quad \frac{1}{a^2} = \alpha + \frac{1}{R^2}, \quad r(\varphi(r) + \psi(r)) = 2\,\theta(z).$$

Es wird dann das vorhergehende Integral $= \int_0^\alpha \frac{\theta(z)\,dz}{\sqrt{\alpha - z}}$

Damit dies von α unabhängig sei, muss die Gleichung bestehen:

$$\Theta(z) = \frac{C}{\sqrt{z}}, \qquad \text{daraus folgt:}$$

$$\varphi(r) + \psi(r) = \frac{2CR}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

$$\Omega = \int_0^\alpha \frac{Cdz}{\sqrt{z(\alpha - z)}} = C\pi.$$

Man kann also: $C = m$ setzen. Mithin wird:

$$\varphi(r) + \psi(r) = \frac{2mR}{\sqrt{R^2 - r^2}}. \tag{7}$$

Hat die Fläche einen Äquator, so folgt daraus, dass die Kugel die einzige derartige Fläche ist.

Die Gleichung (7) stellt also die Bedingung dafür auf, dass die geodätischen Linien dieser betreffenden Fläche sämtlich geschlossen sind, abgesehen von denen, die auf einen Rand stossen. Die Flächen sind mithin nicht singularitätenfrei.

T a n n e r y (1892) hat eine Fläche vierter Ordnung:

$$16a^2(x^2 + y^2) = z^2(2a^2 - z^2)$$

aufgestellt, deren geodätische Linien sich sämtlich schliessen. Die Fläche besitzt jedoch auch eine Singularität, nämlich einen konischen Punkt.

Singularitätenfreie Rotationsflächen, auf denen sämtliche geodätische Linien geschlossen sind, hat erst Z o l l (1901) aufgestellt. Derselbe geht von der D a r b o u x'schen Gleichung (7) aus, verändert jedoch etwas die Bezeichnung. Sind nämlich:

$$z = f(r) \text{ und } z = g(r)$$

die Gleichungen der beiden Meridiankurven oberhalb und unterhalb des Maximalparallelkreises, so wird die Gleichung (7):

$$(8) \quad \sqrt{1 + f'(r)^2} + \sqrt{1 + g'(r)^2} = \frac{2\,m\,R}{\sqrt{R^2 - r^2}} \,.$$

Soll nun die Fläche geschlossen und singularitätenfrei sein, so muss die Meridiankurve mit ihren beiden Enden senkrecht auf die Rotationsachse treffen, also:

$$f'(o) = o \text{ und } g'(o) = o$$

Aus (8) folgt dann: $m = 1$. Aus der Bedeutung von m ergiebt sich der Satz:

„Auf den singularitätenfreien Rotationsflächen, auf denen alle geodätischen Linien geschlossen sind, umwinden diese geodätischen Linien die Fläche nur einmal, besitzen also keine Doppelpunkte."

Im ersten Teile seiner Arbeit, in dem er sich nur mit Flächen mit Scharen von geschlossenen geodätischen Linien beschäftigt, hat Zoll gezeigt, dass die Längen der geodätischen Linien einer solchen Schar in einem rationalen Verhältnis stehen. Bezieht man nämlich die Fläche auf ein geodätisches Parallelkoordinatensystem, so schneiden die orthogonalen Trajektoren der geodätischen Linien von denselben gleiche Längen aus; sind nun die geodätischen Linien geschlossen, so müssen ihre Längen gleich sein. Da man aber unter Umständen eine geodätische Linie mehrmals durchlaufen muss, ehe die benachbarten sich schliessen, so kann man nur sagen, dass die Längen der geschlossenen geodätischen Linien in einem rationalen Verhältnis stehen. Auf den oben gefundenen Flächen

umwinden jedoch sämtliche geodätische Linien die Fläche nur einmal, mithin folgt der Satz:

„Auf den singularitätenfreien Rotationsflächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien besitzen die geodätischen Linien wirklich alle die gleiche Länge."

Führt man m = 1 in (8) ein, so wird die Bedingungsgleichung:

$$\sqrt{1+f'(r)^2}+\sqrt{1+g'(r)^2}=\frac{2R}{\sqrt{R^2-r^2}}.$$

„Soll nun die Fläche singularitätenfrei sein, so muss sich f(r) und g(r) im Intervalle $o \leqq r \leqq R$ als eindeutige mit ihren Ableitungen stetige Funktion ergeben, und ausserdem müssen die Gleichungen bestehen:

$$f'(o)=o,\ g'(o)=o;\ f'(R)=\infty,\ g'(R)=\infty."$$

Um ein Beispiel zu bekommen, setzt Zoll $R = 1$ und wählt:

$$(9)\quad \sqrt{1+f'(r)^2}=\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}+cr^2, \sqrt{1+g'(r)^2}=\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}-cr^2,$$

wo c eine Konstante bedeutet. Die gestellten Bedingungen sind sicher erfüllt, wenn $c \leqq 1/2$ ist. Da man für $c = o$ die Kugel erhält, so ergibt sich der Satz:

„Die Kugel lässt sich in stetiger Weise so deformieren (variieren), dass alle geodätischen Linien geschlossen bleiben."

Aus den Gleichungen (9) ergeben sich für die Meridiankurve einer Rotationsfläche mit lauter geschlossenen geodätischen Linien die Gleichungen:

$$(10)\quad \begin{cases} f(r) = -\int \sqrt{\frac{1}{1-r^2} + c^2 r^4 + \frac{2\,cr^2}{\sqrt{1-r^2}} - 1}\,.\,dr, \\ g(r) = \int \sqrt{\frac{1}{1-r^2} + c^2 r^4 - \frac{2\,cr^2}{\sqrt{1-r^2}} - 1}\,.\,dr. \end{cases}$$

Um noch zu beweisen, dass diese Fläche auch an der Stelle $z = o$ $r = 1$ eine analytische Fläche ist, entwickelt Zoll r als Funktion von z an der Stelle $z = o$ in eine Potenzreihe, und es ergibt sich dann aus $z = f(r)$ und $z = g(r)$ dasselbe Resultat.

„Demgemäss liefert Beispiel (10) eine singularitätenfreie überall analytische Fläche mit lauter geschlossenen geodätischen Linien."

4. Die geodätischen Linien auf den Flächen konstanten Krümmungsmasses.

Eine dritte Klasse von Flächen, die zu den Liouville'schen Flächen gehören, bilden die Flächen konstanten Krümmungsmasses. Für die Flächen, deren Krümmungsmass in allen Punkten gleich Null ist, d. h. für die abwickelbaren Flächen, hat Minding (1840) die Differentialgleichung der geodätischen Linien integriert. Derselbe geht von folgender Differentialgleichung aus, die sich auch bei Gauss findet:

$$(11)\quad \frac{\partial E}{\partial p}\,dp^2 + 2\,\frac{\partial F}{\partial p}\,dp\,dq + \frac{\partial G}{\partial p}\,dq^2 = 2\,ds\,d\left(\frac{Edp + Fdq}{ds}\right)$$

Sind u, v, w die Koordinaten, φ der Bogen der Rückkehrkante der abwickelbaren Flächen, sämtlich Funktionen einer Variabeln p, so kann man die Fläche

mit Hülfe einer zweiten Variabeln q darstellen durch die Gleichungen:

$$x = u + q\frac{du}{d\varphi}, \quad y = v + q\frac{dv}{d\varphi}, \quad z = w + q\frac{dw}{d\varphi}.$$

Macht man die Substitutionen:

$$\left(d\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + \left(d\frac{dv}{d\varphi}\right)^2 + \left(d\frac{dw}{d\varphi}\right)^2 = dP^2, \quad Q = q + \varphi$$

und nimmt P und Q als neue Veränderliche, so wird die Gleichung (11):

$$(Q - \varphi)\frac{d^2Q}{dP^2} - 2\left(\frac{dQ}{dP}\right)^2 + \frac{d\varphi}{dP}\frac{dQ}{dP} - (Q - P)^2 = o.$$

Ein Integral dieser Gleichung ist:

$$(Q - P)\cos(P - a) + \int d\varphi \cos(P - a) = k,$$

wo a und k willkürliche Konstanten bedeuten. Diese Gleichung kann mithin als Gleichung der geodätischen Linien auf den abwickelbaren Flächen angesehen werden.

Das Problem der Integration der geodätischen Linien auf den Flächen, deren Krümmungsmass konstant und von Null verschieden ist, hat Weingarten (1882) zuerst auf eine Differentialgleichung vom Riccatischen Typus gebracht. Ist:

(1) $$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

das Linienelement und k das Krümmungsmass der Fläche, so will Weingarten das Linienelement durch Einführung zweier konjugierten komplexen Funktionen ϑ und ϑ^* der Variabeln p und q auf die Form:

(12) $$ds^2 = \frac{d\vartheta\, d\vartheta^*}{\left(\frac{k}{4} + \vartheta\vartheta^*\right)^2}$$

bringen. Eine solche Funktion ϑ genügt als Funktion von p betrachtet der gewöhnlichen Differentialgleichung dritter Ordnung:

$$(13)\qquad \frac{\partial^2 \frac{1}{\sqrt{\frac{\partial\vartheta}{\partial p}}}}{\partial p^2} + \frac{1}{\sqrt{\frac{\partial\vartheta}{\partial p}}}\left\{\frac{Ek}{4} + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{i}{2}\frac{\partial\alpha}{\partial p}\right\} = o,$$

welche in Beziehung auf $\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial p}\right)^{-\frac{1}{2}}$ linear und von der zweiten Ordnung ist.

Es ist dabei:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left\{\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial p} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial p}\rho\right\}$$

$$\text{und } \rho = \frac{F + i\sqrt{EG - F^2}}{E}$$

Setzt man:

$$\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial p}\right)^{-\frac{1}{2}} = V,$$

so besteht die Gleichung:

$$(14)\qquad d\vartheta = \frac{dp + \rho\, dq}{V^2},$$

durch welche die Funktion V der Bedingung unterworfen wird:

$$(15)\qquad \rho\frac{\partial V}{\partial q} - \frac{\partial V}{\partial q} = \frac{1}{2} V \frac{\partial\rho}{\partial q}.$$

Die Funktion V genügt also, als Funktion von p bebetrachtet, der Gleichung (13):

$$(16)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial p^2} + V\left\{\frac{Ek}{4} + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{1}{2}\frac{\partial\alpha}{\partial p}\right\} = o,$$

eine Gleichung, die durch Transformation auf eine Riccatische geführt werden kann. Hat man aus dieser

Gleichung V als Funktion von p mit zwei willkürlichen Konstanten, die man aber hier noch als Funktion von q anzunehmen hat, gefunden, so ergibt sich aus der Gleichung (15) auch V als Funktion von q. Definiert man eine Funktion W durch die Gleichung:

$$W = \frac{1}{\sqrt{E}}\left\{\frac{\partial V^*}{\partial p} - \frac{\alpha^* i}{2} V^*\right\},$$

so genügt diese auch den Gleichungen (15) und (16), und es besteht die Bedingung:

$$V\frac{\partial W}{\partial p} - W\frac{\partial V}{\partial p} = c,$$

die durch Einsetzen des Wertes von W auf die Form:

$$c = -\sqrt{E}\left\{WW^* + \frac{k}{4}VV^*\right\}$$

gebracht werden kann. Unbeschadet der Allgemeinheit kann man den absoluten Wert der Konstanten gleich der Einheit wählen. Hieraus ergibt sich, dass, wenn man:

$$\vartheta = \frac{W}{V}, \quad \vartheta^* = \frac{W^*}{V^*}$$

wählt, durch Multiplikation der Gleichung (14) mit der zu (14) konjugierten folgt:

$$E(VV^*)^2\, d\vartheta\, d\vartheta^* = E\,dp^2 + 2\,F\,dp\,dq + G\,dq^2,$$

und dividiert man durch Gleichung (17), so wird:

$$\frac{d\vartheta\, d\vartheta^*}{\left(\frac{k}{4} + \vartheta\vartheta^*\right)^2} = E\,dp^2 + 2\,F\,dp\,dq + G\,dq^2.$$

Die Funktionen $\vartheta = \frac{W}{V}$ und $\vartheta^* = \frac{W^*}{V^*}$ sind also geeignet, das Linienelement (1) auf die Form (12) zu

bringen. Nun kann man (12) auf die Liouvillesche Form durch eine einfache Transformation bringen, man könnte daher jetzt durch Rechnung direkt die Gleichung der geodätischen Linien finden.

Weingarten schlägt aber einen anderen Weg ein, der allgemeinere Überlegungen benutzt. Er betrachtet eine Funktion:

$$\xi = A\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)^2 + 2B\frac{\partial V}{\partial p}V + CV^2,$$

wobei durch V eine gemeinsame Lösung der Differentialgleichungen:

$$(18) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial p^2} = V,$$

$$(19) \qquad \frac{\partial V}{\partial q} = \beta\frac{\partial V}{\partial p} + \gamma V$$

bezeichnet wird und unter A, B, C beliebig gegebene Funktionen der unabhängigen Variabeln p, q, dagegen unter ∂, β, γ derart gegebene Funktionen verstanden werden, dass eine gemeinsame Lösung dieser Differentialgleichungen existiert, und stellt für diese Funktion ein System von drei linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf. Dasselbe wird ausser durch Funktion ξ noch durch die beiden Funktionen:

$$\eta = A\left(\frac{\partial W}{\partial p}\right)^2 + 2B\frac{\partial W}{\partial p}W + CW^2,$$

$$\zeta = A\frac{\partial V}{\partial p}\frac{\partial W}{\partial p} + B\left(W\frac{\partial V}{\partial p} + V\frac{\partial W}{\partial p}\right) + CVW$$

befriedigt, wenn W ein zweites von V unabhängiges Integral der Gleichungen (18) und (19) ist. Es sind

dann die Funktionen $\xi\ \eta\ \zeta$ linear unabhängig. Nimmt man speziell:

$$\delta = -\left\{\frac{kE}{4} + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{i}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial p}\right\},\ \beta = \rho,\ \gamma = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial \rho}{\partial p},$$

$$A = O,\ B = 1,\ C = \alpha i \qquad \text{und}$$

$$W = \frac{1}{\sqrt{E}}\left\{\frac{\partial V^*}{\partial p} - \frac{\alpha^* i}{2} V^*\right\},$$

so kann man ξ, η, ζ auf die Form bringen:

$$\xi = 2\,VW^*\sqrt{E}\,,$$

$$\eta = -\frac{k}{2}V^*W\sqrt{E}\,.$$

$$\zeta = (W\,W^* - \frac{k}{4}\,VV^*)\sqrt{E}\,.$$

Ferner hat das oben erwähnte System von partiellen Differentialgleichungen in dem speziellen Falle die Eigenschaft, dass, wenn z irgend eins der Integrale des Systems ist, die Gleichung

$$z = o$$

ein Integral der Differentialgleichungen der geodätischen Linien derjenigen Flächen darstellt, von denen $Edp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2$ das Linienelement ist. Benutzt man daher die drei partikulären Lösungen ξ, η, ζ zur Darstellung eines allgemeinen Integrals und identifiziert dieses mit Null, so erhält man die endliche Gleichung der geodätischen Linien der Flächen konstanter Krümmung in der folgenden offenbar reellen Form:

$$a\,V\,W^* + a^*\,V^*\,W + W\,W^* - \frac{k}{4}\,VV^* = o,$$

wenn unter a und a* zwei konjugierte komplexe Konstante verstanden werden.

Es reicht mithin ein einzelnes partikuläres Integral der Differentialgleichung (16), wenn es auch der Bedingung (15) genügt, hin, um ohne weiteres die endliche Gleichung der geodätischen Linien einer Fläche konstanter Krümmung angeben zu können.

Dies ist das hauptsächlichste Ergebnis der Theorie der geodätischen Linien auf den Flächen konstanten Krümmungsmasses in analytischer Hinsicht; in geometrischer Hinsicht hat namentlich Beltrami (1868) sehr viele Eigenschaften derselben abgeleitet, und zwar hat er sich besonders mit den geodätischen Linien auf den Flächen konstanten negativen Krümmungsmasses beschäftigt. Die Geometrie der Flächen konstanter positiver Krümmung ist identisch mit der sphärischen, da sich diese Flächen auf die Kugel abwickeln lassen.

Um die geodätischen Linien auf den Flächen konstanten negativen Krümmungsmasses studieren zu können, geht Beltrami von folgendem Ausdruck des Linienelements aus:

$$ds^2 = k^2 \frac{(a^2 - v^2)\, du^2 + 2\, u\, v\, du\, dv + (a^2 - u^2)\, dv^2}{(a^2 - u^2 - v^2)^2},$$

wobei a eine beliebige Konstante ist. Bei dieser Form des Linienelementes wird jede geodätische Linie durch eine lineare Gleichung zwischen u und v gegeben, und umgekehrt stellt jede lineare Gleichung zwischen u und v eine geodätische Linie dar. Sind x und y die kartesischen Koordinaten einer Ebene, so liefern die Gleichungen:

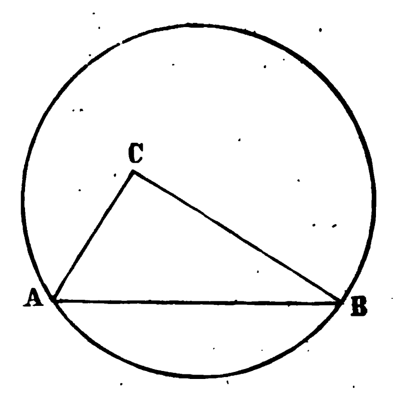
$$x = u, \; y = v$$

eine solche Abbildung unserer Fläche auf die xy-Ebene, dass den geodätischen Linien der Fläche die Geraden der Ebene entsprechen, und zwar geschieht die Abbildung in der Weise, dass den reellen im Endlichen gelegenen Punkten der Fläche die im Innern des „Grenzkreises"

$$x^2 + y^2 = a^2$$

gelegenen Punkte der Bildebene entsprechen. Die im unendlichen gelegenen Punkte bilden sich auf der Peripherie des genannten Kreises ab. Die geodätischen Linien sind die Sehnen des Kreises.

Die Geometrie auf den Flächen konstanter negativer Krümmung oder in anderer Ausdrucksweise die pseudosphärische Geometrie hat insofern Bedeutung als sie, wie Beltrami (1868) zuerst gezeigt hat, ein vollständiges Analogon zu der sogenannten Nicht-Euklidischen Geometrie liefert. Denn in der pseudosphärischen Geometrie gelten, wenn man den Begriff „Gerade" durch „geodätische Linie" ersetzt, dieselben Postulate und Axiome wie in der Ebene, abgesehen von dem sogenannten elften Euklidischen Axiom: „Zwei gerade Linien, welche von einer dritten so geschnitten werden, dass die beiden inneren an derselben Seite liegenden Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte sind, schneiden sich hinreichend verlängert an eben dieser Seite." Denn aus der Abbildung auf die Kreisfläche ergibt sich sofort, dass man zu jeder gegebenen reellen geodätischen Linie AB durch einen ausserhalb derselben gelegenen Punkt B stets zwei parallele geodätische Linien CA und CB egen kann, die einen von 0^0 und 180^0 verschiedenen



Winkel mit einander einschliessen. Die Hälfte dieses Winkels oder den Winkel, den eine parallele geodätische Linie mit der zu der gegebenen senkrechten einschliesst, ist der sogenannte Parallelwinkel. Dieser hängt von der Länge des Lotes ab.

Daraus dass der Parallelwinkel kleiner als 90⁰ ist, folgt auch, dass auf den pseudosphärischen Flächen die Summe der Winkel eines geodätischen Dreiecks kleiner als 2R ist. Die näheren Formeln für die Trigonometrie der geodätischen Dreiecke auf diesen Flächen sollen später gegeben werden.

III. Allgemeine Ergebnisse der Theorie der geodätischen Linien.

1. Die homogenen Integrale ersten und zweiten Grades.

Wir wenden uns nun den allgemeinen Methoden der Bestimmung der geodätischen Linien zu; dieselben

gehen darauf aus, Lösungen der partiellen Differentialgleichung:

$$(20) \qquad \Delta\theta = 1$$

zu suchen. Um eine solche Differentialgleichung:

$$(21) \qquad f(u, v, p, q) = 0$$

zu integrieren, wo u, v die unabhängigen Variabeln und p und q die partiellen Ableitungen der gesuchten Funktion nach u und v bedeuten, hat man nach Lagrange eine zweite Gleichung:

$$(22) \qquad \varphi(u, v, p, q) = C$$

hinzuzunehmen, wo φ so zu bestimmen ist, dass bei der Berechnung von p und q aus (21) und (22) die Integrabilitätsbedingung:

$$\frac{\partial p}{\partial v} = \frac{\partial q}{\partial u}$$

stattfindet. Die Bestimmung von φ als Funktion der vier Variabeln u, v, p, q führt auf die lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$(f, \varphi) = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

die auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückgeführt werden kann. Ist (22) ein Integral dieses Systems und hat man p und q aus (21) und (22) berechnet, so wird die Lösung der Gleichung (20):

$$\theta = \int (p\,du + q\,dv) \qquad \text{und}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial C} = C'$$

die Gleichung der geodätischen Linien.

Da man φ aus der Gleichung:

$$(23) \qquad (\Delta, \varphi) = 0$$

nicht allgemein berechnen kann, so hat man zunächst über die Funktion φ spezielle Annahmen gemacht. Es ergaben sich daraus verschiedene Klassifikationen der Intregrale. Mit dieser Theorie haben sich besonders französische Mathematiker beschäftigt. Dieselben gehen von der dynamischen Fassung des Problems der geodätischen Linien aus. Es sind in diesem Falle p und q gleich den Componenten der Geschwindigkeit des beweglichen Punkes. Die Gleichung (20) stellt das Integral der lebendigen Kraft dar, und es handelt sich nun darum, noch ein zweites Integral (22) der Bewegungsgleichungen zu finden. Die speziellen Annahmen über φ gehen dahin, dass man φ in bestimmter Weise von den Komponenten der Geschwindigkeit p und q abhängen lässt. So hat Bertrand (1857) zuerst die Integrale der Probleme der Mechanik studiert, die algebraisch inbezug auf die Geschwindigkeiten sind. Er hat jedoch noch keine Anwendungen auf die geodätischen Linien gemacht. (Koenigs (1886) hat gezeigt, dass, wenn ein Problem der Dynamik irgend welche algebraischen Integrale hat, es auch notwendig rationale ganze oder gebrochene haben muss. Man kann sich also auf das Studium der ganzen und gebrochenen Integrale beschränken.) Nach Bertrand hat Massieu (1861) denselben Gegenstand betrachtet und gezeigt, dass die Integrale zusammengesetzt sind aus einer Konstanten gleich einer homogenen Funktion der Grössen p und q, während die anderen Variabeln in irgend einer Weise eintreten. Dann hat er besonders die Integrale ersten und zweiten Grades behandelt. Ist:

$$ds^2 = 4 \lambda \, dx \, dy,$$

so wird die Gleichung (20):

$$\frac{pq}{\lambda} = 1.$$

Massieu nimmt zuerst:

$$\varphi = a\,p + bq$$

an, wo a und b Funktionen von x und y sind. Setzt man diesen Wert von φ in (23) ein, so muss diese Gleichung identisch befriedigt werden, d. h. die Koeffizienten von p und q müssen einzeln gleich Null sein. Daraus kann man a, b und auch λ bestimmen, denn es ist klar, dass nicht alle Flächen ein Integral ersten Grades für die geodätischen Linien zulassen. Auf diese Weise erhält Massieu den Satz:

Die Rotationsflächen und die Flächen, die sich auf solche abwickeln lassen, sind die einzigen, für die ein lineares und homogenes Integral existiert.

Ist:

$$\varphi = a\,p^2 + 2\,bpq + cq^2,$$

so ergibt sich aus (23), dass bei passender Wahl der Variabeln die beiden Fälle:

$$a = 1, \quad c = 1$$

$$a = 1, \quad c = 0$$

zu unterscheiden sind. Massieu hat nur den ersten Fall behandelt, auch Bour (1862) hat die zweite Annahme nur erwähnt. Bei der ersten Annahme kann man das Linienelement auf die Form:

$$ds^2 = 4\,(f\,(x + y) + f_1\,(x - y)\,)d\,x\,dy$$

bringen; also die Flächen, deren Linienelement auf die Liouvillesche Form reduktibel ist, bilden eine erste Klasse, für die das Problem der geodätischen Linien ein homogenes Integral zweiten Grades inbezug auf

p und q zulässt. Die andere Annahme ergibt das Linienelement:

$$ds^2 = 4\,(x\,Y' + Y_1)\,dx\,dy,$$

wo Y und Y_1 Funktionen bedeuten, die nur von y abhängen. Diese Form ist von Koenigs als die Lie'sche bezeichnet worden aus einem Grunde, der später bei der geodätischen Abbildung hervortreten wird.

Darboux fässt die Resultate folgendermassen zusammen:

Ist:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2$$

das Linienelement einer Fläche,

$$\Delta\theta = e\,p^2 + 2\,f\,p\,q + g\,q^2 = 1 \tag{24}$$

die partielle Differentialgleichung, von der die Bestimmung der geodätischen Linien abhängt und:

$$e'\,p^2 + 2\,f'\,pq + g'q^2 = C \tag{25}$$

ein Integral zweiten Grades, so können zwei Fälle eintreten. Wenn die ersten Glieder der Gleichungen (24) und (25) keinen linearen Faktor von der Form $\alpha\,p + \beta\,q$ gemeinsam haben, so ist das Linienelement der Fläche auf die Liouvillesche Form:

$$ds^2 = (U_1 - V_1)\,(du_1^2 + dv_1^2)$$

zurückführbar, wo die Funktionen U_1 und V_1 abgesehen von konstanten Faktoren die Wurzeln der Gleichung zweiten Grades von k:

$$(f' - kf)^2 - (e' - ke)\,(g' - kg) = 0 \tag{26}$$

sind, die man dadurch erhält, dass man ausdrückt, dass:

$$(e' - ke)\,p^2 + 2(f' - kf)\,pq + (g' - kg)\,q^2$$

ein vollständiges Quadrat ist. Man wird also ohne irgend eine Integration das Linienelement auf seinen reduzierten Ausdruck bringen können. Es wird genügen,

als unabhängige Variable irgend welche Funktionen der beiden Wurzeln der Gleichung (26) zu nehmen.

Wenn die ersten Glieder der Gleichungen (24) und (25) einen Faktor gemeinsam haben, so ist das Linienelement auf die Lie'sche Form transformierbar.

Ferner weist Darboux darauf hin, dass, wenn man zwei verschiedene Integrale zweiten Grades:

$$e' p^2 + 2 f' p q + g' q^2 = C'$$
$$e'' p^2 + 2 f'' p q + g'' q^2 = C''$$

erhalten hat, auch:

$$(e' + ke'') p^2 + 2 (f' + kf'') p q + (g' + kg'') q^2 = C' + kC'',$$

wo k eine beliebige Konstante bedeutet, ein Integral des Problems ist. Da jedem Wert von k eine bestimmte Reduktion des Linienelements auf die Liouville'sche Form entspricht, so ergibt sich auch hieraus der Satz, der schon pg. 19 erwähnt worden ist. Wenn das Linienelement einer Fläche auf zwei verschiedene Weisen auf die Liouville'sche Form zurückführbar ist, so ist es auf unendlich viele Weisen auf diese Form zurückführbar.

Im Anschluss hieran untersucht Darboux noch die Fälle, wo das Problem der geodätischen Linien ausser einem linearen Integral noch ein quadratisches zulässt. Existiert ein Integral ersten Grades, so ist, wie Massieu gezeigt hat, die Fläche auf eine Rotationsfläche abwickelbar. Man kann daher nach dem letzten Satz das Problem auch so fassen: wann ist das Linienelement einer auf eine Rotationsfläche abwickelbaren Fläche auf unendlich viele Weisen in die Liouville'sche Form transformierbar. In dieser Weise hat Raffy (1889) das Problem gefasst und ist

zu demselben Resultate wie Darboux gelangt. Wenn:

$$ds^2 = 4\,\lambda\,dx\,dy$$

das Linienelement der Fläche ist, so findet Raffy, dass für die in Rede stehenden Flächen λ die Werte:

$$\lambda = \frac{P + Q\left(e^{x+y} + e^{-(x+y)}\right)}{\left(e^{x+y} - e^{-(x+y)}\right)^2},$$

$$\lambda = Pe^{x+y} + Qe^{2(x+y)}$$

$$\lambda = \frac{P}{(x+y)^2} + Q,$$

$$\lambda = x + y$$

haben kann, wo P und Q beliebige Konstanten sind, und Darboux erhält, dass diese Flächen ausser dem Integral der lebendigen Kraft und dem linearen Integral nicht bloss noch ein quadratisches Integral sondern zwei verschiedene quadratische Integrale haben.

Raffy hat zwar zuerst die explicite Darstellung der Linienelemente gegeben, aber Darboux ist zuerst zu der Methode, die übrigens von der Raffy-schen verschieden ist, gelangt, nach der man die Linienelemente finden kann. Koenigs bezeichnet daher diese Klasse von Flächen als Darboux'sche Flächen.

Koenigs (1895) hat vollständig durch Rechnung die Frage gelöst, alle die Probleme der geodätischen Linien zu finden, die mehrere quadratische Integrale in bezug auf die Geschwindigkeit zulassen. Er führt dabei folgende bequemere Bezeichnung ein, indem er nicht mehr von dem Quadrate des Linienelementes einer Rotationsfläche und der auf sie abwickelbaren Flächen spricht, sondern dies einfach das betreffende

Rotations-ds^2 (ds^2 de révolution) nennt. Die Ergebnisse, die er findet, sind folgende:

1. Wenn ein ds^2 für seine geodätischen Linien mehr als drei quadratische Integrale abgesehen von dem der lebendigen Kräfte besitzt, so besitzt es genau fünf und hat konstante Krümmung.

2. Es gibt keine ds^2, deren geodätische Linien genau vier quadratische Integrale abgesehen von dem Integral der lebendigen Kräfte besitzen. Aber es gibt solche, die genau drei zulassen. Diese ds^2 sind die Rotations-ds^2 mit quadratischen Integralen, die durch Darboux bestimmt sind.

2. Geodätische Abbildungen.

Mit den Problemen der homogenen Integrale hat Darboux zwei Probleme in Zusammenhang gebracht, die von Beltrami (1866) und Dini (1870) gelöst worden sind. Das erste Problem lautet: Eine gegebene Fläche in der Art auf eine Ebene abbilden, dass den geodätischen Linien der Fläche die Geraden der Ebene entsprechen. Beltrami löst die Aufgabe folgendermassen: Da den geodätischen Linien die Geraden der Ebene entsprechen sollen, so muss bei passender Wahl der Koordinaten u, v die Differentialgleichung der geodätischen Linien ein Integral von der Form:

$$a u + b v + c = o$$

haben, d. h. sie muss reduktibel auf die Form:

$$du\, d^2 v + dv\, d^2 u = o$$

sein, in der Differentialgleichung der geodätischen Linien müssen daher die Koeffizienten von du^3, $du^2 dv$,

du dv^2, dv^3 verschwinden. Es ergeben sich also die vier Bedingungsgleichungen:

$$E\left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right) - \frac{1}{2} F \frac{\partial E}{\partial u} = o,$$

$$E\frac{\partial G}{\partial u} + F\left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right) - F\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{2} G \frac{\partial E}{\partial u} = o,$$

$$G\frac{\partial E}{\partial v} + F\left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right) - F\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{1}{2} E \frac{\partial G}{\partial v} = o,$$

$$G\left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right) - \frac{1}{2} F \frac{\partial G}{\partial v} = o.$$

Die Behandlung dieser Gleichungen führt darauf, dass sich das Linienelement auf die Liouville'sche Form:

$$ds^2 = (\varphi(\alpha) + \psi(\beta))(\varphi(\alpha)\, d\alpha^2 + \psi(\beta)\, d\beta^2)$$

bringen lässt, wobei aber φ und ψ die speziellen Werte:

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{mm'(e^{r\alpha} + kk'e^{-r\alpha}) - 2h},$$

$$\psi(\beta) = \frac{1}{mm'(k'e^{r\beta} + ke^{-r\beta}) + 2h}$$

haben. Durch eine weitere Rechnung findet er dann, dass das Krümmungsmass dieser Flächen konstant sein muss. Also die einzigen Flächen, die eine Lösung des Problems geben können, sind die Flächen konstanter Krümmung. Darboux hat die Darstellung von Beltrami sehr vereinfacht, eine Vereinfachung, die er auch zum Teil dadurch erreicht, dass er nicht ein allgemeines Koordinatensystem, sondern ein orthogonal geodätisches zu Grunde legt.

Am Schlusse seiner Arbeit hat Beltrami folgende Aufgabe als Verallgemeinerung seines Problems erwähnt: Zwei gegebene Flächen in der Weise auf einander abzubilden, dass den geodätischen Linien der einen

Fläche geodätische Linien der andern entsprechen. Diese Aufgabe hat Dini (1870) gelöst. Er geht von folgendem von Tissot herrührenden Satz aus: „Sind zwei reelle Flächen durch eine ganz beliebige reelle Punkttransformation auf einander abgebildet, so gibt es immer auf der einen Fläche ein orthogonales System von Kurven, deren entsprechende Kurven auf der zweiten Fläche ebenfalls ein orthogonales System bilden". Werden nun diese beiden orthogonalen Kurvenscharen als Koordinatenlinien gewählt, so seien die Linienelemente:

$$ds^2 = E\, du^2 + G\, dv^2,$$
$$ds_1^2 = E_1\, du^2 + G_1\, dv^2$$

Es wird dann die Differentialgleichung der geodätischen Linien für die erste Fläche:

$$2\,EG(du\, d^2v - dv\, d^2u) - E\frac{\partial E}{\partial v}\, du^3 +$$
$$\left(2\,E\frac{\partial G}{\partial u} - G\frac{\partial E}{\partial u}\right) du^2\, dv - \left(2\,G\frac{\partial E}{\partial v} - E\frac{\partial G}{\partial v}\right) du\, dv^2$$
$$+ G\frac{\partial G}{\partial v}\, dv^3 = o.$$

Die Differentialgleichung der geodätischen Linien für die zweite Fläche erhält man hieraus durch Ersetzung von E durch E_1 und G durch G_1. Sollen sich die geodätischen Linien der beiden Flächen entsprechen, so ist notwendig und hinreichend, dass die Differentialgleichungen identisch sind, d. h. dass:

$$E G = \lambda E_1 E_1\,,\ E\frac{\partial E}{\partial v} = \lambda E_1 \frac{\partial E_1}{\partial v}\,,\ 2E\frac{\partial G}{\partial u} - G\frac{\partial E}{\partial u}$$

$$= \lambda\left(2E_1\frac{\partial G_1}{\partial u} - G_1\frac{\partial E_1}{\partial u}\right),\quad 2G\frac{\partial E}{\partial v} - E\frac{\partial G}{\partial v}$$

$$= \lambda\left(2G_1\frac{\partial E_1}{\partial v} - E_1\frac{\partial G_1}{\partial v}\right),\ G\frac{\partial G}{\partial u} = \lambda G_1\frac{\partial G_1}{\partial u}\,.$$

Die Integration dieser Gleichungen ergibt, dass die Linienelemente zweier Flächen, die auf einander geodätisch abbildbar sind, durch folgende Formeln gegeben sind:

$$ds^2 = (U - V)(U_1\,du^2 + V_1\,dv^2) \tag{27}$$

$$ds_1^2 = \left(\frac{1}{aV+b} - \frac{1}{aU+b}\right)\left(\frac{U_1\,du^2}{a(aU+b)} + \frac{V_1\,dv^2}{a(aV+b)}\right) \tag{28}$$

wobei U, U_1 nur von u und V, V_1 nur von v abhängige Funktionen bedeuten. a und b sind willkürliche Konstanten. Daraus folgt, dass die erste Fläche auf unendlich viele Flächen, die nicht auf einander abwickelbar zu sein brauchen, geodätisch abgebildet werden kann. Ferner ergibt sich aus den Formeln, dass eine solche geodätische Abbildung nur bei Liouville'schen Flächen stattfinden kann.

Verlangt man mit Dini sowohl, dass die betreffenden Flächen reell sind, als auch, dass die Abbildung sich durch reelle Gleichungen zwischen den kartesischen Koordinaten der beiden Flächen ausdrücken lassen soll, so geben Dini's Entwickelungen die allgemeinste Erledigung des Problems. Lässt man dagegen alle Beschränkung hinsichtlich der Realität fallen, so erhält man, wie Lie (1882) gezeigt hat,

noch weitere Resultate. Der Tissot'sche Satz erleidet nämlich eine Ausnahme, wenn die Abbildung konform oder halbkonform ist, d. h. wenn sich die beiden Scharen der Linien von der Länge Null auf beiden Flächen entsprechen oder wenn nur eine Schar derselben wieder in Linien von der Länge Null übergeht, die andere aber einer Schar von gewöhnlichen geodätischen Linien entspricht. Der erste Fall bildet nur insofern eine Ausnahme, als in ihm jedem Orthogonalsystem von Kurven wieder ein Orthogonalsystem entspricht, während es im zweiten Falle auf der einen Fläche kein Paar von orthogonalen Kurvenscharen gibt, die bei der Abbildung in orthogonale Kurvenscharen der andern Fläche übergehen. Um diesen letzten Fall zu erledigen, bezieht Lie die eine Fläche auf die Kurven von der Länge Null als Koordinatenlinien, während bei der andern Fläche nur die eine Schar der betreffenden Kurven Koordinatenlinien sind. Es sind dann die Linienelemente der beiden Flächen:

$$ds^2 = 2F\,dx\,dy, \tag{29}$$

$$ds^2 = E_1\,dx^2 + 2F_1\,dx\,dy. \tag{30}$$

Die Differentialgleichung der geodätischen Linien wird, wenn man y als Funktion von x längs der geodätischen Linie annimmt, für (29):

$$y'' + \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial y}y'^2 - \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial y}y' = o,$$

für (30):

$$y'' + \frac{1}{F_1}\frac{\partial F_1}{\partial y}y'^2 + \frac{1}{2F_1}\left(3\frac{\partial E_1}{\partial y} - 2\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)y'$$

$$+ \frac{1}{2F_1^2}\left(E_1\frac{\partial E_1}{\partial y} - 2E_1\frac{\partial F_1}{\partial x} + F_1\frac{\partial E_1}{\partial y}\right) = o.$$

Da beide Differentialgleichungen identisch sein sollen, so erhält man die Bedingungsgleichungen:

$$\frac{\partial \log F_1}{\partial y} = \frac{\partial \log F}{\partial y}, \quad E_1 \frac{\partial E_1}{\partial y} - 2 E_1 \frac{\partial F_1}{\partial x} + F_1 \frac{\partial E_1}{\partial x} = o,$$

$$\frac{1}{F_1}\left(3 \frac{\partial E_1}{\partial y} - 2 \frac{\partial F_1}{\partial x}\right) = -\frac{2}{F}\frac{\partial F}{\partial x}.$$

Ersetzt man x und y durch bestimmte Funktionen von x bezw. y so folgen aus den Differentialgleichungen die Werte:

$$F = y + X(x), \quad E_1 = \tfrac{1}{2} x^{-4} (y + X(x))^2,$$
$$F_1 = - x^{-3} (y + X(x)),$$

wo $X(x)$ eine beliebige Funktion von x ist. Lie erhält also den Satz:

„Sollen zwei Flächen sich in solcher Weise auf einander abbilden lassen, dass die eine und nur die eine Schar von Minimalkurven der einen Fläche einer Minimalkurvenschar auf der zweiten Fläche entspricht, so kann das Bogenelement der ersten Fläche die Form:

(31) $$ds^2 = (y + X(x))\, dx\, dy$$

und gleichzeitig das Bogenelement der zweiten Fläche die Form:

$$ds_1^2 = \tfrac{1}{2} x^{-4} (y + X(x))^2 dx^2 - x^{-3} (y + X(x))\, dx\, dy$$

erhalten."

Beschränken wir uns auf reelle Flächen, so handelt es sich darum, wann das Bogenelement einer reellen Fläche die Form (31) erhalten kann. Es muss dann dasselbe ebenfalls die Form:

$$ds^2 = (x' + \psi(y'))\, dx'\, dy'$$

annehmen können. Dies ist nur möglich, wenn entweder:

$$\psi = by' \quad \text{oder} \quad \psi = \frac{b}{\sqrt{y'}}$$

gesetzt werden kann. Verbindet man diese Resultate mit den D i n i 'schen, so ergibt sich der Satz:

„Gestattet eine reelle Fläche eine geodätische Abbildung auf Flächen, auf welche sie nicht abwickelbar ist, so kann ihr Bogenelement sicher die Form:

$$ds^2 = (\psi(x+y) + \Psi(x-y))dx\,dy$$

erhalten; dabei wird die betreffende Abbildung im allgemeinen durch D i n i ' s Formel geliefert. Wenn jedoch das betreffende Bogenelement entweder die Form;

$$ds^2 = \{(x+y)^2 - (x-y)^2 + 1\}\,dx\,dy$$

$$ds^2 = \{a(x+y) + b(x-y)\}\,dx\,dy$$ [1]

erhalten kann, so gestattet die betreffende Fläche nicht allein solche geodätische Abbildungen, die durch D i n i ' s Formel geliefert werden, sondern noch weitere geodätische Abbildungen, die sich indess nie durch reelle Relationen zwischen den betreffenden Punktkoordinaten ausdrücken lassen.

D a r b o u x hat die beiden Probleme von einem anderen Gesichtspunkte aus betrachtet, indem er die Variationsrechnung in den Vordergrund stellt. Er geht von der Frage aus, welches die Variationsprobleme

$$f(u, v, v')\,du$$

sind, die eine gegebene Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$v'' = \varphi(u, v, v') \tag{32}$$

1) Diese beiden Linienelemente ergeben sich aus den beiden Annahmen über ψ durch einfache Transformation.

als Lösung haben. Ist es nun möglich, unter denselben zu einem Variationsproblem von der Form:

$$\int \sqrt{E + 2Fv' + Gv'^2}\, du$$

zu finden, so lässt sich (32) als Differentialgleichung der geodätischen Linien auf einer Fläche, deren Linienelement:

$$ds^2 = E\, du^2 + 2\, F\, du\, dv + G dv^2$$

ist, auffassen. Da für u und v als rechtwinklige Koordinaten in der Ebene (32) auch eine zweifache Kurvenschar in der Ebene darstellt, so sind dann die gefundenen Flächen derart auf die Ebene abgebildet, dass den geodätischen Linien der Fläche die Kurven der zweifachen Schar in der Ebene entsprechen. Bei dem Beltrami'schen Problem sind die Kurven in der Ebene die Geraden. Man hat also die Differentialgleichung:

$$v'' = 0,$$

und es ergiebt sich, dass die Lösungen, die von der Form $\int \sqrt{E + 2Fv' + Gv'^2}\, du$ sind, Flächen angehören, die konstantes Krümmungsmass besitzen. Bei dem Dini'schen Problem handelt es sich darum, zwei verschiedene Lösungen von der betreffenden Form zu finden; als Bedingung dafür, dass dies möglich ist, ergibt sich, dass die Differentialgleichung der geodätischen Linien ein homogenes quadratisches Integral zulassen muss. Nach den im vorigen Abschnitte behandelten Theorieen erhält man dieselben Ergebnisse, wie sie Dini und Lie gefunden haben.

Die Probleme von Beltrami und Dini hat Busse (1896) verallgemeinert, indem er sich folgende

Frage vorlegt: Unter welcher Bedingung lassen sich zwei Flächenstücke S und Σ derart punktweise eindeutig auf einander beziehen, dass jeder geodätischen Linie des Flächenstückes S eine Linie konstanter geodätischer Krümmung des Flächenstückes Σ entspricht? Dies Problem wird folgendermassen gelöst: Ist:

$$ds^2 = \varphi \, du \, dv$$

das Linienelement der Fläche Σ und

$$(1) \qquad ds^2 = E \, du^2 + 2 F \, du \, dv + G \, dv^2$$

das der Fläche S, so gibt die Forderung, dass den geodätischen Linien von S Kurven konstanter geodätischer Krümmung von Σ entsprechen, fünf Bedingungsgleichungen. Durch Einführung einer Funktion f_1 von u und v, die aus den Koeffizienten von (1) in bestimmter Weise abgeleitet werden kann, erhält man als Lösung des Problems für φ die Werte:

$$(33) \quad 1) \; \varphi = f_1, \qquad 2) \; \varphi(w) = \frac{f_1(w)}{c_1 + \int f_1(w) dw}, \quad w = u + v.$$

Fasst man:

$$ds^2 = f_1 \, du \, dv$$

als Linienelement einer neuen Fläche S_1 auf, so hat diese Fläche folgende Eigenschaft: Sie ist durch die Koordinaten u, v auf die Fläche S so abgebildet, dass den geodätischen Linien von S die geodätischen Linien von S_1 entsprechen, ferner ist sie auf Σ in der Weise konform abgebildet, dass den geodätischen Linien von S_1 Kurven konstanter geodätischer Krümmung von Σ entsprechen.

Nimmt man die erste Lösung des Problems: $\varphi = f_1$, so ist Σ und S_1 aufeinander abwickelbar. Da

sich bei der Abwickelung die geodätische Krümmung nicht ändert, so können den geodätischen Linien, die doch die geodätische Krümmung Null haben, nur wieder geodätische Linien entsprechen. Die Flächen S und Σ sind mithin in diesem Falle so aufeinander abgebildet, dass den geodätischen Linien von S die geodätischen Linien von Σ entsprechen. Dies Problem hat aber Dini schon gelöst. Dasselbe ergibt sich daher, wie es natürlich war, hier als spezieller Fall.

Bei der zweiten Lösung: $\varphi(w) = \frac{f_1(w)}{c_1 + \int f_1(w)\,dw}$, $w = u + v$ folgt, weil in diesem Falle f_1 nur eine Funktion von $u + v$ sein kann, dass diese Lösung nur möglich ist, wenn S_1 und auf Grund der Dini'schen Formeln auch S in eine Rotationsfläche verbiegbar ist. Ist mithin das Flächenstück S auf eine Rotationsfläche abwickelbar, so werden mit Hülfe der Gleichung

$$\varphi(w) = \frac{f_1(w)}{c_1 + \int f_1(w)\,dw}$$

aus jedem Flächenstück S_1 solche Flächenstücke Σ abgeleitet, so dass den geodätischen Linien von S_1 Kurven konstanter geodätischer Krümmung von Σ entsprechen und die Abbildung beider Flächen eine konforme ist. Daraus folgt, dass auch Σ und S in der Weise abgebildet sind, dass den geodätischen Linien von S Kurven konstanter geodätischer Krümmung von Σ entsprechen, wobei allerdings die Abbildung nicht immer konform zu sein braucht.

Ist also das Quadrat der Länge des Linienelementes des auf eine Rotationsfläche abwickelbaren Flächenstückes S in der Form:

$$ds^2 = E(u)(du^2 + dv^2)$$

gegeben, so erhält man aus den Dini'schen Formeln als Fläschenstück S_1:

1. $ds^2 = E(u)(du^2 + dv^2)$,

2. $ds_1^2 = \dfrac{E(u)}{m(E(u) + m)}\left(\dfrac{du^2}{E(u) + m} + \dfrac{dv^2}{m}\right)$

und aus diesen beiden Ausdrücken ergibt sich vermittelst der Formeln $(32)_2$ als Flächenstück Σ:

$$d\sigma^2 = \frac{E(u)}{(c_1 + 2\int E(u)du)^2}(du^2 + dv^2),$$

$$d\sigma_1^2 = \frac{E(u)}{m(E(u) + m)\left(c_1 + 2\int\frac{E(u)\,du}{m(E(u)+m)^{\frac{1}{2}}}\right)^2}\left(\frac{du^2}{E(u)+m} + \frac{dv^2}{m}\right).$$

ds^2 und $d\sigma^2$ und ebenso ds^2 und $d\sigma_1^2$ sind also durch die Koordinaten u und v so auf einander abgebildet, dass den geodätischen Linien von ds^2 Kurven konstanter geodätischer Krümmung von $d\sigma^2$ bezw. $d\sigma_1^2$ entsprechen, aber während die Abbildung von ds^2 und $d\sigma^2$ auf einander konform ist, ist die andere nicht konform.

Die konforme Abbildung zweier Flächen wendet nun Busse besonders auf die Flächen konstanten Krümmungsmasses an, denn dieselben sind immer auf Rotationsflächen abwickelbar. Die Rechnung ergibt, dass, wenn das Krümmungsmass der einen Fläche konstant ist, auch das der andern konstant

sein muss. Daraus ergibt sich der Satz: Auf die Teile einer Fläche konstanten Krümmungsmasses S_1 können die Teile einer jeden Fläche konstanten Krümmungsmasses Σ und nur einer solchen in der Art konform abgebildet werden, dass jeder geodätischen Linie des Flächenstückes S_1 eine Linie konstanter geodätischer Krümmung des Flächenstückes Σ entspricht.

Beltrami hatte also gezeigt, dass die Flächen konstanter Krümmung die einzigen sind, die so auf die Ebene abgebildet werden können, dass den geodätischen Linien die Geraden in der Ebene entsprechen. Aus dem obigen Satze folgt, dass auch die Flächen konstanter Krümmung die einzigen sind, die auf die Ebene in der Weise konform abgebildet werden können, dass den geodätischen Linien der Fläche bei der Abbildung Kreisbogen oder gerade Linien entsprechen.

3. Geodätische und kürzeste Linien.

Es ist oben erwähnt worden, dass die geodätischen Linien nur innerhalb gewisser Grenzen die Eigenschaft besitzen, durch die sie zuerst in die Literatur eingeführt worden sind, nämlich die Eigenschaft, die kürzeste Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten der Fläche zu sein. Jacobi hat 1837 darauf hingewiesen, dass die Minimumseigenschaft der geodätischen Linien nur dann besteht, wenn es zwischen den beiden Endpunkten auf der Kurve nicht zwei andere gibt, zwischen denen man noch eine zweite

unendlich nahe kürzeste Kurve ziehen kann, und in seinen Vorlesungen über Dynamik findet sich die Stelle: „Wenn man von einem Punkte einer Oberfläche nach allen Richtungen kürzeste Linien zieht, so können zwei Fälle eintreten: zwei unendlich nahe kürzeste Linien laufen fortwährend nebeneinander, ohne sich zu schneiden, oder sie schneiden sich wiederum, und alsdann bildet die Kontinuität aller Durchschnittspunkte ihre einhüllende Kurve. Im ersten Falle hören die kürzesten Linien nie auf kürzeste zu sein, im zweiten Falle sind sie es nur bis zum Berührungspunkte mit der einhüllenden Kurve. Das erstere findet, wie sich von selbst versteht, bei allen developpablen Flächen statt, denn in der Ebene schneiden sich die durch einen Punkt gehenden Geraden nie wieder; ferner findet es auch, wie ich gefunden habe, bei allen konkavkonvexen Flächen statt." „Hiermit soll übrigens nicht gesagt sein, dass es nicht auch konkav-konkave Flächen geben könnte, welche in diese Kategorie gehören." Jacobi selbst ist auf diese Fragen nirgends weiter eingegangen.

Dass auf Flächen mit durchaus negativem Krümmungsmass zwei benachbarte geodätische Linien sich niemals schneiden, hat zuerst Bonnet (1855) bewiesen. Gehen von einem bestimmten Punkt O einer Fläche zwei unendlich nahe benachbarte geodätische Linien aus und nimmt man O zum Anfangspunkte eines geodätischen Polarkoordinatensystems, so werde:

$$ds^2 = du^2 + m^2 dv^2.$$

Entspricht nun die eine geodätische Linie einem bestimmten Werte v und die andere dem Werte $v + dv$, so ist die senkrechte Entfernung beider:

$$m\,dv = p.$$

Sollen sich also beide Linien schneiden, so muss $p = o$ oder $m = o$ werden, denn dv ist konstant und nicht gleich Null. Nach Gauss muss m und mithin auch p als Funktion von u betrachtet der linearen Differentialgleichung genügen:

$$\frac{d^2p}{du^2} + \frac{p}{R.R'} = o, \tag{34}$$

wo $\frac{1}{RR'}$ das Krümmungsmass der Fläche in dem Punkte u, v ist; es wird ferner für $u = o : p = o$ und $\frac{dp}{du} = dv$.

Von dieser Gleichung (34) geht Bonnet aus und nimmt an, dass für die betreffende Fläche immer $\frac{1}{RR'} < o$ ist, dann kann man setzen

$$\frac{1}{RR'} < -\frac{1}{a^2}$$

für a als reelle Konstante, nimmt man dann die Gleichung:

$$\frac{d^2p_1}{du^2} - \frac{p_1}{a^2} = o,$$

so wird, wenn man sie in derselben Weise integriert, dass für $u = o$ $p_1 = o$ und $\frac{dp_1}{du} = dv$ ist,

$$p_1 = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{u}{a}} - e^{-\frac{u}{a}}\right)dv.$$

Nach einem Satze von Sturm über Differentialgleichungen muss p_1 in irgend einem Intervalle min-

destens ebenso oft Null werden wie p; da aber p_1 niemals Null wird, so kann auch p nicht Null werden. Also:

Auf einer Fläche von negativem Krümmungsmass ist eine geodätische Linie kürzeste in ihrer ganzen Länge.

Ferner zeigt Bonnet mit Hülfe eines zweiten Satzes von Sturm über Differentialgleichungen die Sätze:

Wenn längs einer geodätischen Linie das Produkt der Hauptkrümmungsradien positiv und kleiner als a^2 ist, kann die Linie nicht der kürzeste Weg sein in einem Intervalle, das grösser als πa ist. Folglich ist die kürzeste Entfernung von irgend zwei Punkten einer konkav-konkaven Fläche kleiner als πa, wobei a^2 eine Zahl ist, die grösser als das Produkt RR' der Hauptkrümmungsradien in allen Punkten der Fläche ist.

Nach Bonnet hat Christoffel (1868) etwas einfacher aus der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 m}{\partial u^2} + m k = 0, \tag{35}$$

wo k das Krümmungsmass der Fläche bedeutet, den von Jacobi angegebenen Satz bewiesen, indem er direkt aus der Gleichung schliesst, dass für $k < 0$ m nie Null werden kann.

Beide Beweise zeigen jedoch nur, dass zwei unendlich nahe benachbarte von einem Punkte ausgehende geodätische Linien sich nicht wieder schneiden: für geodätische Linien, die unter endlichen Winkeln von einem Punkte einer konkav-konvexen Fläche ausgehen haben dies Thomson und Tait (1867) mit Hülfe des Theorems von Gauss über die curvatura integra

eines von geodätischen Linien begränzten Flächenstückes bewiesen; Ausnahmen bilden nur die Umstände, dass die Fläche Punkte besitzt, wo das Krümmungsmass unendlich wird oder zu existieren aufhört, oder wenn die Fläche eine mehrfach zusammenhängende ist.

Was nun die Flächen mit durchweg positiver Krümmung betrifft, so hat zuerst v. Braunmühl (1879) die Enveloppen der geodätischen Linien auf den Rotationsflächen und speziell auf den Rotationsflächen zweiten Grades und 1882 auf den dreiachsigen Flächen zweiten Grades untersucht. Allgemeine Resultate hat jedoch erst v. Mangoldt 1881 gegeben. Derselbe stellt die Unterscheidung von Punkten erster Art und zweiter Art der Fläche auf. Unter den ersteren versteht er solche, die so beschaffen sind, dass unter den von ihnen ausgehenden geodätischen Linien wenigstens einige vorkommen, die von den unendlich nahe benachbarten geschnitten werden. Dass auf den Flächen wirklich Punkte erster Art vorhanden sind, zeigt das Beispiel des Rotationsparaboloides, denn die vom Scheitel ausgehenden Meridiane sind geodätische Linien, die von einem Punkte ausgehen, ohne sich wieder zu treffen.

Eine durchweg positiv gekrümmte Fläche, die frei von Singularitäten ist, kann aber nur dann Punkte erster Art enthalten, wenn sie offen ist.

Um diesen Satz zu beweisen, geht v. Mangoldt von der Gleichung (35) aus. Ist A ein Punkt erster Art, d. h. ist m auf der ganzen Fläche mit Ausnahme des Punktes A von Null verschieden und positiv, so

folgt mit Hülfe der Gleichung (35), dass $\frac{\partial m}{\partial u}$ von dem Anfangswerte 1 für $u = o$ zwar beständig abnehmen muss, aber für endliche u nicht bis zur Null herabsinken kann. Beschreibt man um A mit dem beliebigen Radius U einen geodätischen Kreis und berechnet die curvatura integra des Sektors, der aus diesem durch die beiden Radien ausgeschnitten wird, die den Werten $v_2 = v_1$ von v entsprechen, so wird dieselbe:

$$C < v_2 - v_1$$

Da C mit wachsendem U zunimmt, ohne jedoch die Grenze $v_2 - v_1$ ereichen zu können, so muss sie sich mit unbegrenzt wachsendem U einer endlichen Grenze:

$$C' < v_2 - v_1$$

nähern, die v. Mangoldt die curvatura integra des Winkels der beiden betrachteten geodätischen Linien nennt. Daraus folgt der Satz:

Die curvatura integra eines Winkels zweier geodätischen Linien, die von A ausgehen, ist niemals grösser als dieser Winkel selbst.

Nimmt man die Grösse des Winkels $= 2\pi$, so folgt daraus, dass die curvatura integra der Fläche nicht grösser als 2π sein kann, dass also die Fläche offen ist.

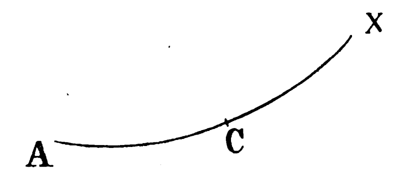
Beschreibt man ferner um einen Punkt erster Art einen geodätischen Kreis und zieht an diesen in einem beliebigen Punkte eine geodätische Tangente, so kann man mit Hülfe des Satzes über die curvatura integra eines Winkels zweier geodätischen Linien zeigen, dass man beim Fortgang auf dieser Tangente immer zu Punkten zweiter Art kommen muss. Auch die Grenz-

kurve der Punkte erster und zweiter Art kann bestimmt werden.

Bei allen diesen Betrachtungen wird abgesehen von der von Thomson und Tait nur der Schnittpunkt einer geodätischen Linie mit der unendlich benachbarten in Erwägung gezogen und angenommen, dass bis zu diesem Schnittpunkte die geodätische Linie wirklich kürzeste Linie ist, während es doch möglich wäre, dass sie schon vorher von andern geschnitten werde, die aber nicht unter einem unendlich kleinen, sondern unter irgend einem endlichen Winkel von den betreffenden Punkten ausgeht. Dies hat allgemein, wie ich glaube, zuerst Darboux in seinen Leçons sur la théorie générale des surfaces in Betracht gezogen. In dem speziellen Falle des Sphaeroides hat Wangerin 1877 im Anschluss an eine nachgelassene Abhandlung Jacobi's (erst 1891 veröffentlicht), die sich mit den Enveloppen auf einem Sphaeroid mit kleiner Excentrizität beschäftigt, bemerkt, dass die geodätischen Linien auf der betreffenden Fläche schon, ehe sie die Enveloppe berühren, die Eigenschaft verlieren, absolute Minima der Entfernung darzustellen.

Darboux gelangt durch Stetigkeitsbetrachtungen dazu, dass die geodätische Linie schon eher aufhört, absolutes Minimum zu sein, ehe sie aufhört, relatives Minimum zu den Wegen zu sein, die sich nur ein wenig von ihr entfernen, und er fasst die Resultate folgendermassen zusammen: Es wird um einen beliebigen Punkt A zwei verschiedene Kurven geben: die eine wird der Ort des ersten Punktes sein, wo jede geodätische Linie durch eine andere von gleicher

Länge geschnitten wird; die andere wird die Enveloppe der geodätischen Linien sein. Wenn sich der Punkt B auf einer geodätischen Linie AX bewegt, so wird der Weg AB solange absolutes Minimum bleiben, bis B den Punkt C der ersten Kurve nicht erreicht hat. Dagegen wird die Linie AB aufhören, absolutes Minimum zu sein, sobald der Punkt B den Punkt C überschritten hat, aber sie wird in bezug auf die unendlich benachbarten Wege Minimum bleiben solange, bis B nicht den Punkt erreicht hat, wo die Enveloppe der geodätischen Linien zum ersten Mal von AX berührt wird."



4. Geodätische Dreiecke.

Gauss beschäftigt sich abgesehen davon, dass er die curvatura integra eines von drei geodätischen Linien gebildeten Dreiecks berechnet, nur mit unendlich kleinen Dreiecken. Bei Einführung geodätischer Polar-Koordinaten wird:

$$ds^2 = dp^2 + m^2 dq^2$$

und mithin:

$$k = -\frac{1}{m}\frac{\partial^2 m}{\partial p^2}, \quad d\Theta = -\frac{\partial m}{\partial p} dq.$$

Ist $d\sigma$ das Flächenelement, so wird die curvatura integra eines geodätischen Dreiecks;

$$K = \int k\, d\sigma = \int\int k\, m\, dp\, dq,$$

wo die Integration über die Fläche des Dreiecks zu erstrecken ist. Mit Hülfe der obigen Formeln für k und $d\theta$ ergibt sich dann:

$$K = \pm (A + B + C - \pi),$$

wobei A, B, C die Winkel des Dreiecks bezeichnen. Es ergibt sich daher der Satz:

„Die Gesamtkrümmung eines geodätischen Dreiecks ist gleich dem Flächeninhalt des Teiles der Kugelfläche, der dem Dreieck entspricht, mit dem positiven oder negativen Zeichen genommen, je nachdem die Fläche, auf der das Dreieck liegt, konkav-konkav oder konkav-konvex ist". „Als Flächeneinheit ist dabei das Quadrat zu nehmen, dessen Seite = 1 (gleich dem Kugelradius) ist, wonach die ganze Kugelfläche = 4π wird. Es verhält sich daher der Teil der Kugelfläche, welcher dem Dreieck entspricht, zur Fläche der ganzen Kugel wie = $(A + B + C - \pi)$ zu 4π".

Dieser Satz kann auch folgendermassen ausgesprochen werden:

„Der Überschuss der Winkelsumme eines von kürzesten Linien auf einer konkav-konkaven Fläche gebildeten Dreiecks über 180^0 oder der Fehlbetrag der Winkelsumme eines von kürzesten Linien auf einer konkav-konvexen Fläche gebildeten Dreiecks an 180^0 wird gemessen durch den Flächeninhalt desjenigen Teils einer Kugelfläche, der jenem Dreieck bei Abbildung durch gleichgerichtete Normalen entspricht, falls die ganze Kugelfläche = 720^0 gesetzt wird."

Was die übrigen Untersuchungen von Gauss über geodätische Dreiecke betrifft, so beziehen sich dieselben, wie schon erwähnt, nur auf unendlich kleine Dreiecke und sind zum grössten Teil aus den praktischen Bedürfnissen für die Feldmesskunst entstanden. Gauss geht dabei von den Gleichungen (3) und (4) pg. 10 aus und sucht sie dadurch zu integrieren, dass er Reihenentwickelungen für die gesuchten Funktionen aufstellt. Er setzt dann ferner das geodätische Dreieck auf der Fläche mit einem ebenen Dreieck, das dieselben Seiten hat, in Beziehung und findet, wenn man sich auf Grössen dritter Ordnung beschränkt, die Formeln:

$$A = A^* + \frac{\sigma}{12}(2\alpha + \beta + \gamma), \quad B = B^* + \frac{\sigma}{12}(\alpha + 2\beta + \gamma),$$

$$C = C^* + \frac{\sigma}{12}(\alpha + \beta + 2\gamma);$$

hierbei bezeichnen A, B, C die Winkel, σ den Inhalt des Flächendreiecks, A^*, B^*, C^* die Winkel des ebenen Dreiecks und α, β, γ die Krümmungen in den Ecken A, B, C. Die Addition der drei Gleichungen ergibt:

$$A + B + C - \pi = \frac{\sigma}{3}(\alpha + \beta + \gamma).$$

In dem Fall der Kugel, in dem $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{R^2}$ ist, erhält man aus den obigen drei Formeln den zuerst von Legendre (1787) aufgestellen Satz: Die Winkel eines sphärischen Dreiecks sind je um ein Drittel des Überschusses der Winkelsumme über 180^0 grösser als die entsprechenden Winkel eines ebenen Dreiecks mit denselben Seiten.

Am Schlusse seiner Abhandlung vergleicht Gauss den Flächeninhalt des Flächendreiecks mit dem des ebenen, und er gelangt, wenn σ^* den Inhalt des ebenen Dreiecks, a, b, c die Seiten der beiden Dreiecke bezeichnen, zu der Gleichung:

$$\sigma = \sigma^* \left(1 + \frac{1}{24} \alpha (a^2 + b^2 + c^2)\right)$$

Hierfür kann auch folgende Formel genommen werden;

$$\sigma = \sigma^* \sqrt{\frac{\sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin C}{\sin A^* . \sin B^* . \sin C^*}} \,.$$

Die Theorie der geodätischen Dreiecke von endlicher Grösse hat Christoffel (1868) gegeben. Er führt zu dem Zwecke eine Grösse ein, die er als reduzierte Länge eines geodätischen Bogens bezeichnet. Diese Funktion, die von vier Variabeln abhängt, nämlich den Koordinaten der Endpunkte des geodätischen Bogens, ist dieselbe, die Gauss mit dem Buchstaben m bezeichnet. Bezieht man eine Fläche auf ein System von geodätischen Polarkoordinaten, so kann man die reduzierte Länge eines geodätischen Bogens r als die Grösse definieren, mit der man den Centriwinkel $d\psi$ multiplizieren muss, um das ihm gegenüberliegende Element $d\sigma$ des geodätischen Kreises vom Halbmesser r zu erhalten, es ist also:

$$m = \frac{d\sigma}{d\psi} \,.$$

Aus der Eigenschaft, dass die reduzierte Länge einer geodätischen Linie ungeändert bleibt, wenn man Anfangs- und Endpunkt derselben vertauscht, ergibt sich der Satz:

Man drehe eine geodätische Linie ohne Änderung ihrer Länge unendlich wenig aus ihrer ursprünglichen Lage, einmal um den einen, das andere Mal um den andern Endpunkt. Sind alsdann die Drehungswinkel am festen Endpunkt einander gleich, so sind es auch die vom beweglichen Endpunkt beschriebenen Wege. Die reduzierte Länge eines geodätischen Bogens bleibt also ungeändert, wenn man Anfangs- und Endpunkt mit einander vertauscht.

Ferner genügt, die reduzierte Länge m der schon von Gauss aufgestellten Differentialgleichung (35).

Was die geodätischen Dreiecke anbetrifft, so gibt Christoffel die endlichen Formeln für sämtliche Winkel und Azimute eines geodätischen Dreiecks und die vollständige Differentiale dieser nämlichen Grössen sowie der drei Seiten, wobei in den betreffenden Ausdrücken nur noch die Koeffizienten des Linienelementes und die reduzierten Längen der drei Seiten des geodätischen Dreiecks vorkommen.

Diese Resultate wendet Christoffel auf die Untersuchung der Frage an, unter welchen Voraussetzungen über die betreffenden Flächen in ähnlicher Weise, wie es bei der Kugel der Fall ist, zwischen den Elementen, nämlich den Seiten und Winkeln, eines geodätischen Dreiecks Gleichungen bestehen, welche von den Koordinaten der drei Ecken unabhängig sind. „Wenn eine solche Gleichung stattfindet, so wird bei einer stetigen Ortsveränderung des Dreiecks, bei welcher fünf Elemente ungeändert bleiben, auch das sechste sich nicht ändern. Ein ähnlicher Schluss gilt in den beiden andern noch möglichen Fällen, wo

zwischen den sechs Elementen zwei oder drei von einander unabhängige Gleichungen stattfinden. „Diese Bedingung für die Verschiebbarkeit der geodätischen Dreiecke auf krummen Flächen können auf das Verschwinden einer Determinante dritten Grades Δ zurückgeführt werden. Christoffel teilt die sämtlichen Flächen in vier Flächengattungen. Zu der ersten gehören die, für welche $\Delta = 0$ ist. Es ist bei ihnen eine stetige Ortsveränderung eines geodätischee Dreiecks ohne Änderung seiner Elemente im allgemeinen unmöglich. Die zweite Flächengattung findet statt, wenn Δ, aber nicht jede Unterdeterminante von Δ identisch verschwindet. Auf einer solchen Fläche gibt es zwischen den Elementen eines geodätischen Dreiecks eine Relation, und es kann im allgemeinen jedes Dreieck ohne Änderung seiner Elemente stetig so verschoben werden, dass jede Ecke auf einer ganz bestimmten Kurve entlang gleitet. Bei der dritten Gattung verschwindet Δ und alle Unterdeterminanten, aber nicht alle Elemente von Δ. Zwischen den Elementen des geodätischen Dreiecks bestehen zwei Relationen und das Dreieck ist in der Weise stetig verschiebar, dass man die Bahn der einen Ecke willkürlich nehmen kann, die Bahnen der beiden anderen Ecken sind dann aber bestimmt. Die vierte Flächengattung endlich erhält man, wenn sämtliche Elemente von Δ identisch Null sind. In diesem Falle ergeben sich drei Relationen zwischen den Seiten und Winkeln eines geodätischen Dreiecks, und dasselbe ist beliebig verschiebbar. Zu der letzten Gattung gehören die Flächen konstanten Krümmungsmasses.

W e i n g a r t e n (1882) hat vollständig den Inhalt der dritten und vierten Flächengattung bestimmt. Er geht von der Bemerkung aus, „das die Verschiebbarkeit aller in einer Fläche denkbaren Dreiecke auch die Verschiebbarkeit der Dreiecke von unendlich kleinen Dimensionen zur Folge hat und dass daher die Bedingungen der Verschiebarkeit der unendlich kleinen Dreiecke einer Fläche notwendige Bedingungen der Verschiebbarkeit aller ihrer endlichen Dreiecke darstellen werden.“ Für ein unendlich kleines Dreieck auf der Fläche gelten die Formeln, die bis auf Grössen vieler Ordnung genau sind:

$$A - A^* = \frac{\sigma^*}{12}(2\alpha + \beta + \gamma), \quad B - B^* = \frac{\sigma^*}{12}(\alpha + 2\beta + \gamma'),$$
$$C - C^* = \frac{\sigma^*}{12}(\alpha + \beta + 2\gamma).$$

Für ein zweites Dreick auf der Fläche mit denselben Seiten und Winkeln ist dann, wenn α', β', γ' die Krümmungsmasse in den Ecken bezeichnen:

$$A - A^* = \frac{\sigma^*}{12}(\alpha' + \beta' + \gamma'), \quad B - B^* = \frac{\sigma^*}{12}(\alpha' + 2\beta' + \gamma),$$
$$C - C^* = \frac{\sigma^*}{12}(\alpha' + \beta' + 2\gamma').$$

Aus diesen Gleichungen in Verbindung mit den obigen folgt:

$$\alpha = \alpha', \quad \beta = \beta', \quad \gamma = \gamma'.$$

Mithin haben wir die Sätze:

1. Ist ein unendlich kleines Dreieck ohne Änderung seiner Seiten und Winkel in einer Fläche stetig verschieblich, so durchlaufen bei einer Ver-

schiebung derselben die Eckpunkte Kurven von unverändertem Krümmungsmass.

2. Ist ein unendlich kleines Dreieck ohne Änderung seiner Seiten und Winkel in einer Fläche derart stetig verschieblich, dass einer der Erdpunkte desselben eine willkürlich in die Fläche gelegte Kurve durchlaufen kann, so ist die Fläche selbst eine Fläche von konstanten Krümmungsmass.

Aus diesen Sätzen folgt sofort, dass die sämtlichen Flächen der dritten und vierten Cristoffelschen Flächengattung konstantes Krümmungsmass besitzen.

Was endlich die zweite Christoffel'sche Flächengattung betrifft, so hat v. Mangoldt (1883) gezeigt, dass die Flächen derselben auf Rotationsflächen abwickelbar sind. Zu dem Zweck nimmt v. Mangoldt ein rechtswinkliges Dreieck auf der Fläche an, dessen Katheten b und c hinreichend klein sind, und entwickelt die Glieder der von Christoffel aufgestellten Determinante Δ und die Determinante selbst nach Potenzen von b und c. Da für die zweite Flächengattung Δ identisch null sein muss, so müssen alle Koeffizienten dieser Entwickelung verschwinden. Hieraus ergibt sich dann, dass alle Flächen der zweiten und mithin auch der dritten und vierten Flächengattung auf Rotationsflächen abwickelbar sind.

Für die Flächen konstanten Krümmungsmasses sind die Formeln für die Trigonometrie der geodätischen Dreiecke schon von Minding (1840) aufgestellt worden. So erhält man bei den Flächen von konstantem positiven Krümmungsmass, wenn a, b, c

die Seiten, α, β, γ die Winkel eines geodätischen Dreiecks sind und k^2 das Krümmungsmass der Fläche ist, die Relationen.

$$\cos(ak) = \cos(bk).\cos(ck) + \sin(bk)\sin(ck).\cos\alpha.$$

$$\frac{\sin(ak)}{\sin\alpha} = \frac{\sin(bk)}{\sin\beta} = \frac{\sin(ck)}{\sin\gamma}.$$

Die analogen Formeln für die Trigonometrie der geodätischen Dreiecke auf den Flächen konstanter positiver Krümmung ergeben sich aus diesen dadurch, dass man k durch i k ersetzt; es gehen dann die trigonometrischen Funktionen in die hyperbolischen über:

$$\cos h(ak) = \cos h(bk).\cos h(ck) + \sin h(bk).\sin h(ck).\cos\alpha,$$

$$\frac{\sin h(ak)}{\sin\alpha} = \frac{\sin h(bk)}{\sin\beta} = \frac{\sin h(ck)}{\sin\gamma}.$$

Literatur.

1827 Gauss,[1] Disquisitiones generales circa superficies curvas. Commentationes Gottingenses recentiores 6.

1837 Jacobi, Zur Theorie der Variationsrechnung und der Differentialgleichungen. J. für Math. 17.

1838 Jacobi, Lettre de M. Jacobi à M. Arago, concernant les lignes géodésiques tracées sur un ellipsoide à trois axes. C. R. 8.

1839 Jacobi, Note von der geodätischen Linie auf einem Ellipsoid und den verschiedenen Anwendungen einer merkwürdigen analytischen Substitution. J. für Math. 19.

1840 Minding, Beiträge zur Theorie der kürzesten Linien auf krummen Flächen. J. für Math. 20.

1842/43 Jacobi, Vorlesungen über Dynamik (hergeg. von Clebsch 1866).

1843 Joachimsthal, Observationes de lineis brevissimis et curvis curvaturae in superficiebus secundi gradus. J. für Math. 26.

1844 J. Liouvillle, De la ligne géodésique sur un ellipsoide quelconque. Journ. de Math. 9.

---

1) Literatur vor Gauss siehe Stäckel (1893.)

1845 M. Roberts, Théorèmes de géométrie. Journ. de Math. 10, C. R. 21.

Chelini, Sulla curvatura delle linee. e delle superficie e sulle linee geodesiche.

1846 M. Roberts, Sur quelques propriétés des lignes géodésiques et des lignes de courbure de l'ellipsoide Journ. de Math. 11.

Chasles, Sur les lignes géodésiques et les lignes de courbure des surfaces du second degré. Journ. de Math. 11.

J. Liouville, Démonstration géométrique relative à l'équation des lignes géodésiques sur les surfaces du second degré. Journ. de Math. 11.

Chasles, Nouvelles démonstrations des deux équations relatives aux tangentes communes à deux surfaces du second degré homofocales; — Et propriétés des lignes géodésiques et des lignes de courbure de ces surfaces. Journ. de Math. 11.

J. Liouville, Sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer. Journ. de Math. 11.

Jacobi, Zwei Beispiele zur neuen Methode der Dynamik. Berliner Monatsberichte.

Chelini, Theoremi relativi alle linee di curvatura e geodesiche sopra i paraboloidi. Giornale Arcadico di Scienze 106.

1847 M. Roberts, Extraits des deux lettres addressées à Liouville. Journ. de Math. 12.

1848 M. Roberts, Nouvelles propriétés des lignes géodésiques et des lignes de courbure sur l'ellipsoide. Journ. de Math. 13.

1848 M. Roberts, Theorems on the lines of curvature of an ellipsoid. Cambridge and Dublin math. Journn..7.

1849 Besge, Sur un problème de géométrie. Journ. de Math. 14.

Hart, Geometrical demonstration of some properties of geodesic lines. Cambridge and Dublin math. Journ. 8.

Hart, On geodesic lines traced a surface of the second degree. Cambridge and Dublin math. Journ. 8.

1850 J. Liouville, Note III zu Monge, Application de l'analyse à la Géométrie.

Rutledge, On certain properties of surfaces of the second order. Cambridge and Dublin math. Journ. 9.

M. Roberts, Mémoire sur la géométrie de courbes tracées sur la surface d'un ellipsoide. Journ. de Math. 15.

1851 J. Liouville, Sur un théorème de M. Chasles. Journ. de Math. 16.

Graves, Elementary geometrical proof of Joachimsthal's theorem. J. für Math. 42.

Rutledge, On certain „loci“ connected with the geodesic lines of surfaces of the second order. Cambridge and Dublin math Journ. 11.

Tortolini, Sulla espressione dei raggi delle due curvature di una linea geodesica tracciata sulla superfice di un' ellissoide. Tortolini Annali 2.

1851 Tortolini, Sulla determinazione della linea geodesica descrita sulla superficie di un' ellissoide a tre assi ineguali secondo il metodo de Cav. Jacobi, da esso dato nelle lezioni di Meccanica all' Università di Koenigsberg. Rom Acc. P. d. N. L. Atti 4.

1852 Brioschi, Intorno ad alcuni punti della teorica delle superficie. Tortolini Annali 3.

1855 Bonnet, Sur quelques propriétés des lignes géodésiques. C. R. 40.

Bonnet, Deuxième note sur les lignes géodésiques. C. R. 41.

1856 J. Liouville, Sur des questions de minimum. Journ. de Math. (2) 1.

1857 W. Roberts, Sur une ligne géodésique de l'ellipsoide. Journ. de Math. (2) 2.

Bertrand, Mémoire zur quelques-unes des formes les plus simples qui puissent présenter les intégrales des équations différentielles du mouvement d'un point matérial. Journ. de Math. (2) 2.

Codazzi, Intorno le superficie che hanno costante il prodotto dei due raggi di curvatura. Tortolini Annali 8.

1858 Böklen, Über geodätische Linien. Schlömilch Z. 3.

1859 Molins, Sur les lignes de courbure et les lignes géodésiques des surfaces développables dont les génératrices sont parallèles à celles d'une surface réglée quelconque. Journ. de Math. (2) 4.

1860 Chasles, Résumé d'une théorie des surfaces du second ordre homofocales C. R. 50,

1860 Chasles, Résumé d'une théorie des coniques sphériques homofocales et des surfaces du second ordre homofocales. Journ. de Math. (2) 5.

Betti, Sopra la teorica generale delle superficie curve. Annali di Mat. 3.

Aoust, Sur une forme de l'équation de la ligne géodésique ellipsoidale et de ses usages pour trouver les propriétés communes aux lignes ellipsoidales et à des courbes planes correspondantes. C. R. 50.

1861 Massieu, Sur les intégrales algébriques des problémes de Mécanique. Paris.

Weierstrass, Über die geodätischen Linien auf dem dreiachsigen Ellipsoid. Berl. Berichte.

1862 Bour, Sur l'intégration des équations différentielles partielles du premier et du second ordre. I. de l' Éc. Pol. cah. 38.

1863 Weingarten, Über Flächen, deren Normalen eine gegebene Fläche berühren. J. für Math. 62.

Weingarten, Über die Oberflächen, für welche einer der beiden Hauptkrümmungshalbmesser eine Funktion des andern ist. J. für Math. 62.

1864 O. Bonnet, Démonstration du théoréme de Gauss relatif aux petits triangles géodésiques situés sur une surface quelconque. C. R. 58.

1866 Beltrami, Risoluzione del Problema: „Riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette." Annali di Mat. (1) 7.

1867 Thomson and Tait, Treatise on natural philosophy.

1868 Beltrami, Saggio di interpretazione della Geometria non euclidea. Batt. G. 6 od. 1869. Essai d'interprétation de la géométrie non euclidienne. Ann. de l'Éc. Norm. 6.

Beltrami, Sulla teoria delle linee geodetiche. Rend. d. Ist. Lomb. (2) 1.

Hoüel, Quelques réflexions au sujet de la ligne de longueur minimum sur la sphère. Nouv. Ann. (2)7.

Christoffel, Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke. Berl. Abh.

Allégret, Mémoire sur la flexion des lignes géodésiques tracèes sur une même surface quelconque. C. R. 66.

Schering, Erweiterung des Gauss'schen Fundamentalsatzes für Dreiecke in stetig gekrümmten Flächen. Gött. Nachr.

1869 Beltrami, Intorno ad un nuovo elemento introdotto dal Sig. Christoffel nella teoria delle superficie Rènd. d. Ist. Lcmb. (2) 2.

Weingarten, Über eine geodätische Aufgabe. Astr. Nachr. 73.

Dini, Ricerche sopra la teorica delle superficie. Mem. d. Soc. ital. (3) 2.

1870 Clarke, On the course of geodesic lines on the Earth's Surface. Phil. Mag. 39.

Cayley, On the geodesic lines on an oblate spheroid. Phil. Mag. 40.

Dini, Sopra un problema che si presenta nella teoria generale delle rappresentazione geografiche

di una superficie su di un 'altra. Annali di Mat. (2)3.

1871 Cayley, Note on the geodisic lines on an ellipsoid. Phil. Mag. 41.

1872 Cayley, On geodesic lines, in particular those of a quadric surface. Proc. of Lond. math soc. 4.

Cayley, On the geodesic lines on an ellipsoid. Mem of the Lond. astr. soc. 39.

1873 Cayley, Addition to the memoir on geodesic lines in particular those of a quadric surface. Proc. of L. M. S. 4.

Enneper, Bemerkungen über geodätische Linien. Schlömilch Z. 18.

Mascow, Über die geodätische Linie auf dem abgeplatteten Rotationsellipsoid. I.-D. Greifswald.

18/4 v. Escherisch, Die Geometrie auf den Flächen constanter negativer Krümmung. Wien. Berichte 69.

1875 Laguerre, Sur un genre particulier de surface, dont on peut intégrer les lignes géodèsiques. Bull. S. M. F. 1.

Herzog, Bestimmung einiger spezieller Minimalflächen. J. d. naturf. Ges. Zürich 20.

1876 Laguerre, Sur les lignes géodésiques des surfaces du second ordre. Nouv. Ann. (2)15.

Laguerre, Sur les curbes gauches et sur la valeur de la torsion en un point d'une ligne géodésique tracée sur une surface du second ordre. Bull. S. M. F. 4.

Henneberg, Über solche Minimalflächen, welche eine vorgeschriebene ebene Curve zur geodätischen Linie haben. I.-D. Zürich.

1876 Henneberg, Uber diejenige Minimalfläche, welche die Neil'sche Parabel zur ebenen geodätischen Linie hat. Z. d. naturs. Ges. Zürich 21.

1877 Brill und Klein, Mathematische Modelle in Gips:

I. Bacharach, Die Rotationsfläche der Tractrix mit geodätischen und Haupttangenten-Curven.

IV. Rohn, Die geodätischen Linien auf dem Rotationsellipsoid.

V. Rohn, Die geodätischen Linien durch die Nabelpunkte des dreiachsigen Ellipsoids.

VI. v. Braunmühl, Die Rotationsflächen konstanter mittlerer Krümmung nebst geodätischen Linien.

IX. Bacharach, Rotationsfläche von konstantem negativen Krümmungsmass (Kegeltypus) nebst geodätischen und Asymptoten-Linien.

X. Dyck, Rotationsfläche von konstantem negativem Krümmungsmass (Hyperboloidtypus) mit parallelen geodätischen Linien und geodätischen Kreisen.

Levy, Sur l'équation à dérivées partielles du troisième ordre exprimant que le problème des lignes géodésiques, considéré comme problème de Mécanique, admet une intégrale algébrique du troisiéme degré. C. R. 97.

Levy, Sur l'équation à dérivées partielles du quatrième ordre exprimant que le problème des lignes géodésiques, considéré comme problème de Mécanique, admet une intégrale algébrique du quatrième degré. C. R. 97.

1877 L e v y , Sur l'intégrale intermédiaire du troisième ordre de l'équation à dérivées partielles du quatrième ordre exprimant que le problème des lignes géodésiques admet une intégrale algébrique du quatriéme ordre. C. R. 97.

L e v y , Sur les intégrales rationelles du problème des lignes géodésiques. C. R. 97.

L e v y , Sur les intégrales intermédiaires de l'équation à dérivèes partielles générale exprimant que le problème des lignes géodésiques, considéré comme problème de Mécanique, admet une intégrale rationelle par rapport aux composantes de la vitesse du mobile. C. R. 97.

F l e i s c h e r , Über die geodätischen Linien auf zentralen Oberflächen zweiter Ordnung. St. Gallen.

1878 L i e , Sätze über Minimalflächen. Arch. f. Math og. Naturv. 3.

v. B r a u n m ü h l , Über geodätische Linien auf Rotationsflächen und jene Einhüllenden derselben, welche von allen duich einen Punkt gehenden kürzesten Linien gebildet werden. I.-D. München.

1879 L i e , Klassifikation der Flächen nach der Transformationsgruppe ihrer geodätischen Linien. Universitspr. Christiania.

L i e , Über Flächen, deren Krümmungsradien durch eine Relation verknüpft sind. Arch. f. Math. og. Naturv. 4.

A z a r e l l i , Equazione della linea geodetica con qualche applicazione. Acc. P. N. L. 31.

H o p p e , Untersuchungen über kürzeste Linien. Grunert. Arch. 64.

1879 Hoppe, Über die kürzesten Linien auf den Mittelpunktsflächen. Grunert Arch. 63.

v. Braunmühl, Über Enveloppen geodätischer Linien. Math. Ann. 14.

Braunmühl, Über die kürzesten Linien der developpablen Flächen. Bair. Bl. 15.

Schwering, Neue Darstellung der geodätischen Linien auf dem Rotationsellipsoid. Schlömilch Z. 24.

1880 Desmartres, Sur les surfaces à génératrices circulaires. N. C. M. 6.

Lie, Zur Theorie der Flächen konstanter Krümmung III u. IV. Arch. f. Math. og. Natur.

v. Braunmühl, Über ein Problem des Minimums. Bair. Bl. 16.

Brill, Mathematische Modelle.

XVIII. v. Braunmühl, Die Envelloppen geodätischer Linien auf dem verlängerten und auf dem abgeplatteten Rotationsellipsoid.

Fais, Sulle principali proprietà delle trajettorie ortogonali delle generatrici delle superficie rigate. Mem. di Bologna (4)1.

1881 Böklen, Über geodätische Linien. Schlömilch Z. 26.

v. Mangoldt, Über diejenigen Punkte auf positiv gekrümmten Flächen, welche die Eigenschaft haben, dass die von ihnen ausgehenden geodätischen Linien nie aufhören, kürzeste Linien zu sein. I. für Matth. 91.

1881 v. Mangoldt, Über eine charakteristische Eigenschaft der developpablen Flächen. Math. Ann. 18.

Nebelung, Trigonometrie der Flächen mit konstantem Krümmungsmass. Pr. Dortmund.

Enneper, Zur Theorie der Curven doppelter Krümmung. Gött. Nachr.

Lie, Zur Theorie der geodätischen Curven der Minimalflächen. Arch. f. Math. og Naturv. 6.

Lie, Transformationstheorie der partielle Differentialgleichung $s^2 - rt = \frac{(1 + p^2 + q^2)^2}{a^2}$. Arch. f. Math. og. Naturv. 6.

Enneper, Zur Theorie der Curven doppelter Krümmung. Math. Ann. 19.

1882 Weingarten, Über die Verschiebbarkeit geodätischer Dreiecke in krummen Flächen. Berl. Berichte.

Staude, Über Fadenkonstruktionen des Ellipsoids. Math. Ann. 20.

Staude, Über geodätische Bogenstücke von algebraischer Längendifferenz auf dem Ellipsoid. Math. Ann. 20.

v. Braunmühl, Geodätische Linien und ihre Enveloppen auf dreiachsigen Flächen zweiten Grades. Math. Ann. é0.

Enneper, Über Flächen mit besonderen Meridiankurven. Gött. Abh. 29.

Lie, Untersuchungen über geodätische Curven. Math. Ann. 20.

1883 W e i n g a r t e n, Über die Eigenschaften des Linienelementes der Flächen von konstantem Krümmungsmass. J. für Math. 94, 95.

B r i l l, Zur Theorie der geodätischen Linie und des geodätischen Dreiecks. Münch. Abh. 14.

v. B r a u n m ü h l, Über die reduzierte Länge eines geodätischen Bogens und die Bildung jener Flächen, deren Normalen eine gegebene Fläche berühren. Münch. Abh. 14.

v. M a n g o l d t, Klassifikation der Flächen nach der Verschiebbarkeit ihrer geodätischen Dreiecke. J. für Math. 94.

H a z z i d a k i s, Über die Curven, welche sich so bewegen können, dass sie stets geodätische Linien der von ihnenn erzeugten Flächen bleiben. J. für Math. 95.

B o n n e t, Démonstrations des propriétés fondamentales du système de coordonées polaires géodésiques. C. R. 97.

B o n n e t, Démonstration nouvelle de deux théorèmes de M. Bertrand. C. R. 97.

S t a u d e, Über geodätische Polygone auf Flächen zweiten Grades. Math. Ann. 21.

C z u b e r, Die geodätische Linie auf der Kreiskegelfläche. Grunert Arch. 69.

P i c a r t, Note sur les propriétés des lignes géodésiques et des lignes de courbure de l'ellipsoide. Nouv. Ann. (3) 1.

N e o v i u s, Bestimmung zweier speziellen periodischen Minimalflächen, auf welchen unendlich viele

gerade Linien und unendlich viele ebene geodätische Linien liegen. J.-D. Helsingfors.

1883 Darboux, Sur les surfaces dont la courbure totale est constante. C. R. 97.

Sur les surfaces à courbure constante. C. R. 97

Sur l'équation aux dérivées partielles des surfaces à courbure constante. C. R. 97.

1884 Bäcklund, Om ytar med konstant negativ kröckning. Lund Årsskr. 19.

1885 Pirondini, Studi geometrici relativi spezialmente alle superficie gobbe. Batt. G. 23.

v. Braunmühl, Notiz über geodätische Linien auf Flächen zweiten Grades, die sich durch elliptische Funktionen darstellen lassen. Math Ann. 26.

Staeckel, Über die Bewegung eines Punktes auf einer Fläche. J.-D. Berlin.

1886 Noske, Die kürzesten Linien auf dem Ellipsoid. Pr. Königsberg i. Pr.

Koenigs, Sur les intégralas algébriques des problèmes de la Dynamique. C. R. 103.

1887 Resal, Note sur la courbure des lignes géodésiques d'une surface de révolution. Nouv. Ann. (3) 6.

Jamet, Théorème sur les lignes géodésiques des surfaces de révolution. Belg. Bull. (3) 13.

Catalan, Sur les lignes géodésiques des surfaces de révolution. Belg. Bull (3) 13.

Astor, Lignes géodésiques des surfaces réglées dont les génératrices coupent la ligne de striction sous un angle constant, et dont le paramètre de distribution est constant. Ass. Franc, Toulouse.

1887 H a l p h e n, Un théorème sur les arcs des lignes géodésiques des surfaces de révolution du second degré. C. R. 105.

H a l p h e n, Un théorème sur les lignes géodésiques de l'ellipsoide de révolution allongé. C. R. 105.

R. L i o u v i l l e, Sur une classe d'équations différentielles parmi lesquelles, en particulier, toutes celles des lignes géodésiques se trouvent comprises. C. R. 105.

1888 R. L i o u v i l l e, Sur les lignes géodésiques des surfaces à courbure constante. Americain J. 10.

P a r a f, Sur deux théorèmes de Jacobi relatifs aux lignes géodésiques. C. R. 106.

B o n n e t, Observations relatives à la communication précédente. C. R. 106.

F i b b i, Sulle superficie che contengono un systema die geodetiche a torsione costante. Pisa Ann. 5.

V o s s, Uber diejenigen Flächen, auf denen zwei Scharen geodätischer Linien ein konjugiertes System bilden. München. Ber.

P u c h t a, Analytische Darstellung der kürzesten Linien auf allen abwickelbaren Flächen. Wien. Ber.

P i r o n d i n i, Sur les surfaces de révolution. Nouv. Ann. (3) 7.

P i r o n d i n i, Sulle linee a doppia curvatura. Batt. G. 26.

B i o c h e, Sur les systèmes de courbes qui divisent homographiquement les génératrices d'une surface réglée. Toulouse Ann 3.

1889 R a z z a b o n i, Sulla rappresentazione di una superficie sa die un'altra al modo di Gauss. Batt. G. 27.

R a z z a b o n i, Delle superficie sulle quali due serie di geodetiche formano un sistema conjugato. Bologna Mem. (4) 9.

B u r n s i d e, The lines of zero length on a surface es curvilinear coardinates. Mess. (2) 19.

A l b e g g i a n i, Linee geodetiche tracciate sopra talmi superficie. Palermo Rend. 3.

R. L i o u v i l l e, Sur les représentations géodésiques des surfaces. C. R. 108.

R. L i o u v i l l e, Sur le caractère auquel se reconnaît l'équation différentielle d'un système géodésique. C. R. 108.

A n t o m a r i, Sur une propriété caratéristique des lignes géodésiques d'un cône. S. M. F. Bull. 17.

D a r b o u x, Leçons sur la théorie générales des surfaces. Bd. II.

G a u s s, Allgemeine Flächentheorie. Ostwald's Klassiker No. 5.

R a f f y, Sur un problème de la théorie des surfaces. Darboux Bull (2) 13.

R a f f y, Sur un problème de la théorie des surfaces. C. R. 108.

K o e n i g s, Sur les surfaces, dont le ds^2 peut être ramené de plusieurs manières au type de Liouville. C. R. 109.

R a f f y, Sur les éléments linéaires doublement harmoniques. C. R. 109.

K o e n i g s, Sur les surfaces, dont le ds^2 est réductible de plusieurs manières à la forme de Liouville. C. R. 109.

1889 Raffy, Sur certaines éléments linéaires harmoniques. C. R. 109.

1890 Ermakow, Über geodätische Linien. Mosk. Math. Samml. 15.

Guichard, Recherches sur les surfaces à courbure totale constante et sur certaines surfaces qui s'y rattachent. Ann. de l'éc. Norm. (3) 7.

Guichard, Sur les surfaces qui possèdent un réseau de géodésiques conjugées. C. R. 140.

Padova, Sopra un teorema di geometria differenziale. Lomb. Ist. Rend. (2) 23.

Marcolonco, Sulle geodetiche tracciate sulle quadriche prive di centro. Rom, Acc. L. Rend. (4) 6.

Puchta, Loxodromen und kürzeste Linien auf dem Kreisring. Monatsh. f. Math. 1.

1891 Goursat, Sur la théorie des surfaces applicables. C. R. 112.

Molins, De la détermination des surfaces de révolution ayant un même axe donné et qui sont coupées par une sphère donné suivant une ligne géodésique. Toulouse Mêm. (9) 3.

1892 Koenigs, Résumé d'un mémoire sur les lignes géodésiques. Toulouse Ann. 6.

Sochocki, Über geodätische Linien. Prace mat.-fiz. 3.

Bianchi, Sulla trasformatione di Bäcklund per le superficie pseudosferiche. Rom. Acc. A. Rend (5) 1.

Tannery, Sur une surface de révolution du quatrième degré dont les lignes géodésiques sont algébriques. Darboux Bull. (2) 16.

1892 Tannery, Sur une surface de révolution du quatrième degré dont les lignes géodésiques sont algébriques. Soc. Philom. Bull. (8) 4.

Jacobi (Nachlass), Über die Curve, welche alle von einem Punkte ausgehenden geodätischen Linien eines Rotationsellipsoides berührt, mit einer Ergänzung durch Wangerin. Jacobi's gesammelte Werke Bd. 7.

1893 Ricci, A proposito di una memoria sulle linee geodetiche del sig. G. Koenigs. Rom. Acc. L. Rend. (5) 2.

Koenigs, Réponse à la note de M. le professeur Gregorio Ricci. Rom. Acc, L. Rend. (5) 2.

Ricci, Alcune parole a proposito della precedente riposta del sig. Koenigs. Rom. Acc. L. Rend. (5) 3.

Waelsch, Sur les surfaces à élément linéaire de Liouville et les surfaces à courbure constante. C. R. 116.

Waelsch, Über die Flächen konstanter Krümmung. Wien Ber. 102.

Staeckel, Bemerkungen zur Geschichte der geodätischen Linien. Leipz. Ber. 45.

D'Emilio, Sul teorema di Clairaut, relativo alle geodetiche di una superficie di rivoluzione. Ven. Ist. Atti (7)4.

Koenigs, Sur les équations à intégrales quadratiques. C. R. 117.

Bricke, Die kürzeste Linie auf dem einschaligen Hyperboloid. Pr. Realgymn. Laibach.

Marcolonco, Sur les lignes géodésiques des paraboloides. Teixeira I. 11.

1893 V o d u s e k , Die geodätische Linie. Pr. Obergymn. Laibach.

W a e l s c h , Über Tangentenkongruenzen einer Fläche. Wien, Ber. 102.

K o e n i g s , Sur les géodésiques à intégrales quadratiques. Soc. Philom. Bull. (8)5.

1894 R i c c i , Sulla teoria delle linee geodetiche e dei sistemi isotermi di Liouville. Ven. Ist. Atti (7)6.

W a n g e r i n , Über die Abwickelung von Flächen konstanten Krümmungsmasses sowie einiger anderer Flächen auf einander. Festschrift Halle.

T a t a r i n o w , Über orthogonale Flächen und durch sie bestimmte Kurven. Moskau.

Z i r n g a s t , Die Krümmungslinien des elliptischen Paraboloids als geodätische Ellipsen und Hyperbeln. Pr. Mähr. Weisskirchen.

N o b i l e , Saggio di determinazione diretta della costante di una linea geodetica nell' ellissoide di rivoluzione schiacciato date le coordinate di due punti. Napoli Rend. (2)8.

R a f f y , Sur les géodésiques spéziales des surfaces harmoniques. S. M. F. Bull. 22.

D a r b o u x , Leçons sur la théorie générale des surfaces. Bd. III.

1895 C a l i n o n , La géométrie à deux dimensions des surfaces à courbure constante.

K o e n i g s , Mémoire sur les lignes géodésiques. Mém. Sav. Etr. 31.

1895 Guldberg, Om Bestemmelsen af de geodetiske Linier pa a visse spezielle Flader. Nyt Tidss. for Math. 6.

Blanck, Über die verschiedenen geodätischen Linien auf einem körperlichen Kreisringe. Pr. Gymn. Gera.

Hadamard, Sur les lignes géodésiques des surfaces spirales et les équations différentielles qui s'y rapportent. Bordeaux Procès verbaux 1895/96.

1896 Massini, Sui sistemi di linee di una superficie lossodromici rispetto ad un sistema di geodetiche.

Forsyth, Geodesics, not of revolution. Pr. of L. M. S. 27.

Forsyth, Conjugate points on geodesics on an oblate spheroid. Mess (2)25.

Forsyth, Geodesics on an oblate spheroid Mess. (2)25.

Sabinin, Über eine Fläche konstanter negativer Krümmung. Mosk. Math. Samml. 19.

Busse, Über diejenige punktweise eindeutige Beziehung zweier Flächenstücke auf einander, bei welcher jeder geodätischen Linie des einen eine Linie konstanter geodätischer Krümmung des andern entspricht. Berl. Ber.

Busse, Über eine spezielle konforme Abbildung der Flächen konstanten Krümmungsmasse auf die Ebene. I.-D. Berlin.

Hadamard, Sur les lignes géodésiques des surfaces à courbures opposées. Bordeaux Procès verbaux 1896/97.

1896 Hadamard, Sur les lignes géodésiques. Bordeaux Procès verbaux 1896/97.

Brunel, Des contours tracés sur les surfaces. Bordeaux Procès verbaux 1896/97,

Hadamard, Sur les lignes géodésiques. Bordeaux Procès verbaux 1896/97.

1897 Weyr, Sur l'équation des lignes géodésiques Chicago Congr. Papers.

Hadamard, Sur les lignes géodésiques des surfaces à courbures opposéss. C. R. 124.

Poincaré, Rapport sur un Mémoire de M. Hadamard intitulé: „Sur les lignes géodésiques des surfaces à coubures opposées." C. R. 124.

Jamet, Sur la théorie des lignes géodésiques Marseille Ann. 8.

Waelsch, Über Flächen mit Liouvilleschem Bogenelement. Wien. Ber. 106.

Waelsch, Sur les lignes géodésiques de certaines surfaces. C. R. 125.

Cossarat, Sur les surfaces rapportées à leurs lignes de longueur nulle. C. R. 125.

Riess, Die kürzeste Linie auf dem Paraboloid. Pr. Gymn. Wurzen.

Hadamard, Sur certaines propriétés des trajectoires en Dynamique. Journ. de math. (5) 3.

Finsterwalder, Mechanische Beziehungen bei der Flächen-Deformation. Math. Vereinigg. 6.

Hadamard, Sur le billard non-euclidien. Bordeaux Procès verbaux 1897/98.

1898 Goursat, Sur les équations d'une surface rapportée à ses lignes de longueur nulle. S. M. F. Bull 26.

Hardy, On Darboux lines on surfaces, Americain J. 20.

Hadamard, Sur les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques. Journ. de Math. (5) 4.

Piccioli, Note sur les gèodésiques du cône. Nouv. Ann. (3) 17.

Hadamard, Sur la forme des lignes géodésiques à l'infini et sur les géodésiques des surfaces réglées du second ordre. S. M. F. Bull 26.

1899 Massini, Di alcuni sistemi di traiettorie delle geodetiche Rom Acc. P. d. N. L. Atti 52.

Blutel, Sur une propriété des trajectoires obliques d'une famille de géodésiques. S. M. F. Bull 27.

1900 Issaly, Sur le développement de l'équation différentielle des lignes géodésiques d'une surface. Nouv. Ann. (3) 19.

Lamioni, Sur deux théorèmes de géométrie differentielle. Nouv. Ann. (3) 19.

Piccioli, Sui nodi delle geodetiche del cono. Periodico di Mat. (2) 2.

Lampart, Die geodätischen Linien auf der dreiachsigen Fläche zweiten Grades, welche sich mittels einer Transformation zweiten Grades durch elliptische Funktionen ausdrücken. J.-D. München.

1900 Stäckel, Zur Theorie der geodätischen Linien. Math. Vereinigg. 9.

Wirtinger, Geodätische Linien und Poncelet-sche Polygone. Math. Vereinigg. 9.

1901 Zoll, Über Flächen mit Scharen von geodätischen Linien. Preisschrift Univ. Göttingen.

Ahl, Untersuchungen über geodätische Linien J.-D. Kiel.

1902 Zermelo, Zur Theorie der kürzesten Linien. Math. Vereinigg. 11.

Zühlke, Über die geodätischen Linien und Dreiecke auf den Flächen konstanten Krümmungsmasses und ihre Beziehungen zur sogenannten Nicht-Euklidischen Geometrie. Pr. Charlottenburg.

Weiss, Die geodätischen Linien auf dem Catenoid. J.-D. Jena.

Stäckel, Eine Eigenschaft der geodätischen Linien. Archiv der Math. u. Phys. (3) 4.

Stäckel, Lineare Scharen geodätischen Linien. Math. Ann. 56.



